

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
Departamento de Ecuaciones Funcionales



TESIS DOCTORAL

**Compacidad del soporte en problemas convexos y no  
convexos de cuarto orden procedentes de modelos elásticos  
no lineales**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Francisco, Bernis Carro**

DIRECTOR:

**Jesús Ildefonso Díaz Díaz**

Madrid, 2015

TP  
1984  
078

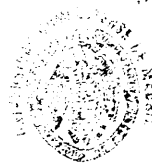
Francisco Bernis Carro



X-53-166872-9

COMPACIDAD DEL SOPORTE EN PROBLEMAS CONVEXOS Y NO CONVEXOS  
DE CUARTO ORDEN PROCEDENTES DE MODELOS ELASTICOS NO LINEALES

Departamento de Ecuaciones Funcionales  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Universidad Complutense de Madrid  
1984



Colección Tesis Doctorales. Nº 78/84

© Francisco Bernis Carro  
Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1984  
Xerox 9200 XB 480  
Depósito Legal: M-15383-1984

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE MATEMATICAS

COMPACIDAD DEL SOPORTE EN PROBLEMAS CONVEXOS Y NO CONVEXOS  
DE CUARTO ORDEN PROCEDENTES DE MODELOS ELASTICOS NO LINEALES

MEMORIA

que para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta

FRANCISCO BERNIS CARRO

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES

Madrid, 1982



#### AGRADECIMIENTOS

A Ildefonso Díaz Díaz por la dirección de esta tesis.

A José Luis Andrés Yebra por su constante y desinteresada ayuda.

A M.F. Bidaut-Veron, H. Brezis, J.L. Lions y R. Redheffer por el interés y apoyo mostrados en contactos personales o escritos.



# INDICE DE MATERIAS

PARTE I. INTRODUCCION .....	3
1. Planteamiento del problema y convenios de notación .....	5
2. Resumen del contenido .....	15
3. Modelo físico .....	22
PARTE II. RESULTADOS PRELIMINARES .....	25
4. Teoremas de existencia y de problema bien puesto .....	27
5. Desigualdades que involucran derivadas y propiedades asintóticas ..	32
6. Casos en que $\Gamma$ es Lip, $C^1$ o convexa .....	38
PARTE III. EL PROBLEMA $r$ -POTENCIAL Y EL METODO DE SEMEJANZA .....	43
7. Ecuación de Euler y lema de "prolongación única" para el problema $\alpha\beta r$ .....	45
8. Algunos lemas de semejanza y homogeneidad .....	47
9. Teoremas de semejanza y unicidad (problema $\alpha\beta r$ ) .....	56
10. Compacidad del soporte y fórmula de autosemejanza .....	62
11. Regularidad en el problema $r$ -potencial .....	66
PARTE IV. EL PROBLEMA $\Gamma$ : LEMAS BASICOS .....	71
12. $u^{iv}$ es una medida donde $u' \neq 0$ si $\Gamma$ es "semi-monótona" .....	73
13. Ecuación de Euler donde $u' \neq 0$ si $\Gamma$ es abs. continua .....	76
14. Estudio de los puntos en que $u' = 0$ .....	80
15. Estudio del extremo del soporte cuando el número de arcos es finito .....	86



PARTE V. EL PROBLEMA $\Gamma$ : RESULTADOS PRINCIPALES .....	93
16. Ecuación de Euler y otras ecuaciones integrales/diferenciales ..	95
17. Estructura de los arcos de $u$ y algunas acotaciones .....	103
18. Principios de comparación y decrecimiento geométrico de $u'(a_n)$ y $u''(a_n)$ .....	109
19. Compacidad del soporte si $ \Gamma'(s)  \geq c s ^{r-1}$ con $0 < r < 2$ .....	114
20. Compacidad del soporte: mejoras si $0 < r \leq 1$ .....	121
21. Regularidad en el problema $\Gamma$ .....	124
22. Compacidad del soporte: otra demostración ( $2/3 \leq r \leq 1$ ) .....	128
PARTE VI. EL PROBLEMA $r$ -POTENCIAL: COMPLEMENTOS .....	131
23. Aplicaciones de la parte V al problema $r$ -potencial .....	133
24. Continuidad en los parámetros $\alpha, \beta, r$ .....	138
25. El problema límite cuando $r \rightarrow 0$ .....	143
26. Un arco o infinitos arcos .....	147
27. Estudio del caso en que $U$ tiene un solo arco ( $r < 2/3$ ) .....	152
28. Unicidad y no unicidad .....	156
29. Acotación de $(2/3) - \varepsilon_0$ .....	161
PARTE VII. OTROS RESULTADOS .....	163
30. Compacidad del soporte en problemas con "segundo miembro" $g$ ...	165
31. El problema $\alpha\beta r$ con la restricción $v \geq 0$ .....	170
32. El problema con funcional $J(v) = \frac{1}{p} \int_0^\infty  v'' ^p + \frac{1}{r} \int_0^\infty  v ^r$ .....	172
33. El problema con funcional $J(v) = \frac{1}{j} \int_0^j  v'' ^j + \frac{1}{k} \int_0^k  v ^k$ .....	173
INDICE DE NOTACIONES .....	175
INDICE DE LOS PRINCIPALES RESULTADOS .....	179
BIBLIOGRAFIA .....	181

PARTE I

INTRODUCCIÓN



1. Planteamiento del problema y convenios de notación. (\*)1-A Planteamiento del problema

Dados los números reales  $\alpha, \beta$  y la función boreliana

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

consideramos el siguiente problema  $\alpha\beta\Gamma$  o problema  $\Gamma$ , tomado de la teoría no lineal de barras elásticas:

$$\text{minimizar} \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (v''(x))^2 dx + \int_0^\infty \Gamma(v(x)) dx$$

en el conjunto de las funciones localmente integrables tales que

$$v'' \in L^2(\mathbb{R}^+) \quad , \quad \int_0^\infty |\Gamma(v(x))| dx < \infty$$

y que verifican las condiciones de contorno

$$v(0) = \alpha \quad , \quad v'(0) = \beta$$

En la mayoría de los teoremas asumiremos  $\Gamma \geq 0$  y  $\Gamma(0) = 0$ .

Llamaremos problema  $\alpha\beta r$  o problema  $r$ -potencial al caso particular

$$\Gamma(s) = \frac{C}{r} |s|^r \quad , \quad C > 0 \quad , \quad r > 0$$

Entenderemos que la constante  $C$  permanece fija salvo indicación en contrario.

Las integrales son de Lebesgue. Las derivadas son en sentido de distribuciones (sección 1-C).  $\Gamma$  boreliana implica  $\Gamma(v(x))$  medible (sección 1-D).

-----  
(\*) Índice de notaciones en la pág. 175 .

El problema  $\Gamma$  es convexo si  $\Gamma'$  es convexa. El problema  $r$ -potencial es convexo si y sólo si  $r \geq 1$ .

La existencia de solución es más bien "standard" si  $\Gamma$  es inferiormente semicontinua,  $\Gamma \geq 0$  y el conjunto de minimización es no-vacío (sección 4). Al permitir que  $\Gamma$  tome el valor  $+\infty$ , el teorema de existencia incluye inecuaciones variacionales como la de la sección 31.

La unicidad es bien conocida si  $\Gamma$  es convexa (sección 6-C), pero no hay resultados generales para  $\Gamma$  no convexa. En este trabajo establecemos que, en el caso no convexo ( $0 < r < 1$ ), el problema  $\alpha\beta r$  tiene solución única salvo para ciertos valores de  $(\alpha, \beta, r)$  en que hay exactamente dos soluciones, obteniendo una descripción muy detallada de la estructura de esta pérdida de unicidad (teorema 9.1 y sección 28). (\*)

La ecuación diferencial de Euler asociada al problema  $\Gamma$  es

$$u^{iv}(x) + \Gamma'(u(x)) = 0$$

La validez y el significado de esta ecuación, cuando  $\Gamma$  no es  $C^1$  ni convexa, es otra de las cuestiones investigadas en este trabajo: teorema 16.1. (En la sección 6 resumimos los casos ya conocidos:  $\Gamma \in C^1$  y  $\Gamma$  convexa).

Decimos que nuestro problema es de cuarto orden debido al orden de la ecuación de Euler.

El resultado más importante de este trabajo es la compacidad del soporte de las soluciones del problema  $\Gamma$ : teorema 19.1. La principal hipótesis es

$$|\Gamma'(s)| \geq c|s|^{r-1} \quad \text{con} \quad 0 < r < 2$$

En particular, las soluciones del problema  $r$ -potencial tienen soporte compacto si  $0 < r < 2$ . Para este problema disponemos de otra demostración más breve basada en el método de semejanza.

-----  
(\*) En el índice de resultados (p.179) se indican las páginas de los principales teoremas.

Es orientativo observar que si la derivada de  $\Gamma$  es lipschitziana en un entorno del origen, el soporte es no-compacto en virtud de teoremas clásicos (sección 6-B).

Al contrario de lo que ocurre con la ecuación de Euler y con la regularidad, la demostración de la compacidad del soporte es más difícil cuando  $\Gamma$  es  $C^1$  en el origen.

Los únicos trabajos conocidos en la literatura sobre compacidad del soporte en problemas con ecuaciones diferenciales de cuarto orden son los siguientes:

El problema  $r$ -potencial con  $r=1$  (y una pequeña modificación: véase la sección 33) se trata detalladamente en Berkovitz y Pollard [1], [2]. (En el segundo artículo se referencian los trabajos anteriores). Redheffer [1] completa su estudio y aplica el método de semejanza. Hes-tenes y Redheffer [1], [2] lo generalizan incluyendo funciones peso y términos con derivadas intermedias. Sus resultados no implican los nuestros, excepto para  $r=1$ .

En otros dos artículos, Berkovitz y Pollard [3], [4] estudian un problema variacional bastante distinto cuyas soluciones verifican la misma ecuación diferencial que en sus artículos [1] y [2].

Bidaut-Veron [1], [2], [3] estudia el problema  $\Gamma$  con  $\Gamma$  convexa,  $\Gamma(s) \geq C|s|$ ,  $\Gamma(0) = 0$  y demuestra la compacidad del soporte en dimensión  $N$  con simetría esférica. Nuestros resultados abarcan una amplia clase de funciones convexas y no convexas,  $C^1$  y no  $C^1$ , que no verifican la desigualdad  $\Gamma(s) \geq C|s|$ . (Notemos que esta desigualdad y  $\Gamma(0) = 0$  implican que  $\Gamma$  no es  $C^1$  en el origen).

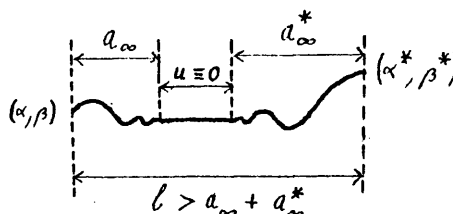
La cuestión de la compacidad del soporte para problemas de cuarto orden en dimensión  $N \geq 2$ , sin simetría esférica, permanece abierta.

La compacidad del soporte en problemas de segundo orden ha sido estudiada, en cualquier dimensión, por muchos autores, empezando con Brezis [1], a base de emplear principios de comparación. Puede verse un resumen en I. Díaz [1], [2]. Estos métodos no sirven para problemas de cuarto orden debido a que los principios de comparación involucran más

condiciones de contorno y son válidas en menos situaciones. No obstante, en este trabajo también aplicamos principios de comparación (o de positividad), aunque de una forma mucho más indirecta.

El problema de segundo orden análogo al problema  $r$ -potencial se estudia, en dimensión  $N$ , por Caffarelli [1] cuando  $r=1$ , Alt y Caffarelli [1] cuando " $r=0$ " y Phillips [1] cuando  $0 < r < 1$ . (El significado de  $r=0$  puede verse en nuestra sección 25). En estos trabajos se añade la restricción  $v \geq 0$ . (\*)

El estudio de la propiedad de compacidad del soporte explica que planteemos el problema en intervalo infinito. En intervalo acotado esta propiedad se traduce en que la solución es idénticamente nula en un cierto subintervalo cuya frontera es una frontera libre



es decir, no conocida como dato del problema sino como parte de la resolución del mismo. Fijados unos datos de contorno, para que exista dicha frontera libre la longitud del intervalo,  $l$ , ha de ser suficientemente grande. Las cotas del soporte,  $a_\infty$ , obtenidas en este trabajo nos dan cotas explícitas de dicha longitud. (Véase la figura adjunta).

En la ecuación de Euler se observa que el "segundo miembro" es nulo. La compacidad del soporte en problemas "con segundo miembro" se estudia después con bastante facilidad (sección 30).

Por último, mencionaremos las propiedades de regularidad de las soluciones (teorema 21.1). La regularidad en el interior del soporte está estrechamente relacionada con la ecuación de Euler. La regularidad global en  $R^+$  requiere además un cuidadoso estudio del extremo del soporte. Cuando  $\Gamma$  no es lipschitziana ni convexa, creemos que la aportación de este trabajo a este respecto es nueva, tanto por los resultados como

(\*) Es interesante confrontar los resultados de Phillips de regularidad hólderiana con nuestro teorema 11.2 (pág.68 y nota pág.69).

por el método de estudio del extremo del soporte. (Los casos  $\Gamma$  lipschitziana y  $\Gamma$  convexa se presentan en la sección 6).

#### 1-B Algunas notaciones

Llamamos  $v$  a una función genérica del conjunto de minimización del problema  $\alpha\beta\Gamma$  o del problema  $\alpha\beta r$ .

Con la letra  $u$  designamos a una solución del problema  $\alpha\beta\Gamma$  o del problema  $\alpha\beta r$ , salvo indicación expresa en contrario. También escribiremos  $u(x; \alpha, \beta)$  cuando queramos especificar los datos de contorno. Dado que la solución puede no ser única, convenimos que en las afirmaciones sobre  $u$  se sobreentiende "para toda solución  $u$  del problema  $\alpha\beta\Gamma$ " (o del problema  $\alpha\beta r$ , según contexto). Por tanto, en los teoremas cuyas hipótesis no implican las del teorema de existencia, laste sis están condicionadas a la existencia de  $u$ .

$a_1, a_2, \dots$  serán los ceros consecutivos de  $u$  y  $a_\infty$  el extremo superior de su soporte;  $a_\infty$  puede ser finito o infinito.

Empleamos una  $U$  (mayúscula) para la solución del problema  $\alpha\beta r$  con  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Veremos que  $U$  es única para todo  $r > 0$ . Los ceros y el extremo del soporte de  $U$  serán  $A_1, A_2, \dots, A_\infty$ . ( $A_1 > 0$ ).

Suponemos que  $\alpha > 0$  (con cualquier  $\beta$  real) o  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$ , de modo que  $u(x) > 0$  cerca de  $x = 0$ . Esto no significa pérdida de generalidad en tanto que las hipótesis sobre  $\Gamma(s)$  sean simétricas respecto a  $s = 0$ .

El caso  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  no lo tratamos, pues si  $\Gamma \geq 0$  y  $\Gamma(0) = 0$  la única solución es  $u \equiv 0$  (lema 5.5).

Decimos que  $u$  "tiene infinitos arcos" para significar que la gráfica de  $u$  en  $(0, a_\infty)$  está formada por una sucesión infinita (numerable) de arcos contiguos de signo alternante.

Cuando nos referimos -ocasionalmente- a dimensión  $N$ , entendemos  $\Delta v$  y  $\Delta^2 v$  en vez de  $v''$  y  $v^{iv}$ .

Para otras notaciones, véase el índice de notaciones situado al final de este trabajo, antes de la bibliografía, en la pág. 175.



### 1-C Convenios sobre las derivadas y las igualdades c.t.p.

Todas las derivadas son en sentido de distribuciones. Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}$ , acotado o no. Las funciones localmente integrables en  $\Omega$  (consideradas como clases en la forma usual) las identificamos con distribuciones sobre  $\Omega$ . Si una función  $f$  es igual c.t.p. en  $\Omega$  a una función continua  $g$ , identificamos  $f$  con  $g$ . Si  $g$  posee extensión continua a  $\bar{\Omega}$  (cierre de  $\Omega$ ), identificamos  $f$  y  $g$  con dicha extensión. Las igualdades c.t.p. las entenderemos redefinidas de forma que se verifiquen en los puntos de continuidad.

Exceptuamos de estos convenios la función  $\Gamma$  (véanse las notas de la sección 1-D).

Resumimos varios resultados fundamentales del análisis real de una variable en el siguiente lema. (Véase Schwartz [1], cap II, sección 4). "Localmente en  $S$ " significa "en cada compacto de  $S$ " y las derivadas son, desde luego, en sentido de distribuciones.

**Lema 1.1** Sea  $f$  una distribución sobre un intervalo abierto  $S \subset \mathbb{R}$ , acotado o no. Entonces

I.  $f' \in L_{loc}^1(S) \iff f \in \text{Abs } C_{loc}(S)$ . En tal caso, la derivada puntal de  $f$  en c.t.p. se identifica con  $f'$ .

II.  $f' \in L_{loc}^\infty(S) \iff f \in \text{Lip}_{loc}(S)$ . Esta equivalencia también es cierta suprimiendo "loc" en ambos lados.

III.  $f'$  medida de Radon sobre  $S \iff f$  localmente de variación acotada en  $S$ .

IV.  $f''$  medida de Radon no-negativa sobre  $S \iff f'$  no-decreciente en  $S \iff f$  convexa finita en  $S$ .

V.  $f$  convexa finita en  $S \implies f \in \text{lip}_{loc}(S)$ .

En particular, todas las funciones del conjunto de minimización del problema  $\Gamma$  pertenecen a  $C^1(\bar{R}^+)$  y tienen derivada primera localmente absolutamente continua (punto I del lema).

#### 1-D Medibilidad de $\Gamma(v(x))$

Citamos Royden [1] y de Barra [1] como referencias para este apartado. Por "medible" entendemos siempre medible de Lebesgue.

La condición " $\Gamma$  boreliana" garantiza la medibilidad de la función compuesta  $\Gamma(v(x))$ , en virtud del siguiente lema (Royden [1], pág.70):

Lema 1.2 *La función compuesta  $f \circ g$  es medible si  $f$  es boreliana y  $g$  es medible.*

Para funciones definidas en un intervalo real y con valores en  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  se comprueba inmediatamente el siguiente:

Lema 1.3 *Son borelianas : a) las funciones monótonas y, por tanto, las de variación acotada ; b) las funciones semicontinuas y, en particular, las continuas, y c) las funciones convexas (finitas o no).*

#### Notas

a) No basta imponer  $\Gamma$  medible, pues puede ser  $f \circ g$  no medible con  $f$  medible y  $g$  continua.

b)  $\Gamma$  es una función definida en todas partes y no una clase "definida salvo conjunto de medida nula". El problema  $\Gamma$  puede cambiar si se cambia el valor de  $\Gamma$  en un solo punto. P.ej., si en el problema de la sección 25 cambiamos a  $\Gamma(s) = 1$  para todo  $s$ , entonces el conjunto de minimización pasa a ser vacío.

c) Recordamos también que una función boreliana puede dejar de ser boreliana si se cambian sus valores en un conjunto de medida nula.

1-E Hipótesis sobre  $\Gamma$ 

En este apartado catalogamos tres hipótesis sobre  $\Gamma$  con el fin de facilitar su frecuente uso posterior, pero sólo asumiremos alguna de estas hipótesis en los lugares donde lo indiquemos expresamente.

Estas tres hipótesis son:

"Positividad definida":

$$\Gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \inf_{|t| \geq |s|} \Gamma(t) > 0 \quad \text{si} \quad s \neq 0 \quad (1.1)$$

"Semi-monotonía":

$$\Gamma \text{ es no-decreciente en } [0, \infty) \text{ y no-creciente en } (-\infty, 0] \quad (1.2)$$

Continuidad absoluta en cada compacto:

$$\Gamma \in \text{Abs } C_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \quad (1.3)$$

La relación (1.2) junto con  $\Gamma(0) = 0$  implican  $\Gamma \geq 0$ .

Cuando se asume con (1.2), (1.1) puede simplificarse a

$$\Gamma(0) = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma(s) > 0 \quad \text{si} \quad s \neq 0$$

Cuando  $\Gamma$  es semicontinua inferiormente (y, en particular, cuando es continua) el teorema del mínimo absoluto nos permite escribir (1.1) en la forma

$$\Gamma(0) = 0, \quad \Gamma(s) > 0 \quad \text{si} \quad s \neq 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{|s| \rightarrow \infty} \Gamma(s) > 0$$

Cuando se asume con (1.3), (1.2) puede enunciarse

$$s \Gamma'(s) \geq 0 \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.1 La función  $|s|^x$ ,  $x > 0$ , verifica (1.1), (1.2) y (1.3).

Ejemplo 1.2 La función

$$\exp \left( - \frac{1}{|s|^q} \right), \quad q > 0$$

verifica (1.1), (1.2) y (1.3) y tiende a cero en el origen más deprisa que cualquier potencia positiva.

Ejemplo 1.3 La función

$$\frac{|s| - 1}{\ln |s|}$$

verifica (1.1), (1.2) y (1.3) y tiende a cero en el origen más despacio que cualquier potencia positiva.

Ejemplo 1.4 La función par tal que  $\Gamma(0) = 0$  y

$$\Gamma'(s) = \begin{cases} s^{q-1} + \left( s^{r-1} - s^{q-1} \right) \sin^2 \frac{1}{s} & \text{si } 0 < s \leq 1 \\ 1 & \text{si } s \geq 1 \end{cases} \quad (q > r > 0)$$

verifica (1.1), (1.2) y (1.3) y  $\Gamma'$  tiene infinitas oscilaciones en todo entorno del origen. Obsérvese que

$$|s|^{q-1} \leq |\Gamma'(s)| \leq |s|^{r-1} \quad \text{para } |s| \leq 1$$

Como se ve, las funciones que verifican estas tres hipótesis pueden ser "extremadamente" no convexas y tener derivada "muy" discontinua.

### 1-F Solución explícita de algunos problemas $\alpha\beta\Gamma$

1. Si  $\Gamma(s) \equiv 0$  entonces la solución única es

$$u(x) = \alpha + \beta x$$

2. Si  $\Gamma(s) = 2s^2$  la ecuación de Euler es  $u^{iv} + 4u = 0$  y la solución única es

$$u(x) = \alpha e^{-x} \cos x + (\alpha + \beta) e^{-x} \sin x$$

3. Si  $\Gamma(s) = |s|$  la solución -de soporte compacto- tiene infinitos arcos cuárticos semejantes. La resolución explícita se encuentra en Berkovitz y Pollard [2]. si  $\alpha = 0$  y en Redheffer [1] si  $\alpha\beta \neq 0$ . En realidad, el problema tratado por estos autores no es exactamente el problema

$\Gamma(s) = |s|$ , pero es reducible al mismo, según explicamos en la sección 33. En el artículo de Berkovitz y Pollard [2] se dan referencias anteriores.

4. En la sección 25 resolveremos el problema con

$$\Gamma(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \neq 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

La solución se expresa totalmente en forma explícita mediante radicales, cualesquiera que sean  $\alpha$  y  $\beta$ . Es un polinomio de tercer grado "de menos de dos arcos" prolongado por cero. Para ciertos  $\alpha$  y  $\beta$  (calculados también explícitamente) hay dos y sólo dos soluciones.

2. Resumen del contenido (\*)

En la sección 3 damos una breve descripción del modelo físico.

La parte II contiene el teorema de existencia y el de problema bien puesto, desigualdades que involucran derivadas y propiedades asintóticas, así como los casos en que  $\Gamma$  es lipschitziana,  $C^1$  o convexa.

En la parte III estudiaremos el problema  $\alpha\beta r$  por el método de semejanza, obteniendo los teoremas 9.3 y 9.4, que nos dan una información muy detallada sobre la solución. Este método fué aplicado por Redheffer [1] al caso  $r=1$ .

El teorema 9.3 dice que la solución del problema  $\alpha\beta$  puede obtenerse de la solución  $U$  del problema 01 mediante una traslación y una semejanza:

$$u(x; \alpha, \beta) = \tau U(\sigma x + s)$$

El teorema 9.4 afirma que, si  $r > (2/3) - \varepsilon$ ,  $U$  tiene infinitos arcos semejantes de signo alternante:

$$-U(x + \lambda_1) = \mu U(\lambda x) \quad (2.1)$$

La idea del método es la siguiente. Consideremos (2.1). Si  $U'(\lambda_1) \neq 0$ , entonces  $\lambda$  y  $\mu$  pueden escogerse de forma que  $\mu U(\lambda x)$  verifique la misma ecuación diferencial (de Euler) y las mismas condiciones de contorno que  $-U(x + \lambda_1)$ , de modo que son iguales si se sabe la unicidad.

Para  $r \geq 1$  sabemos la unicidad (por ser  $J$  convexo) y disponemos de una demostración directa de que  $U'(\lambda_1) \neq 0$ , por lo que el anterior argumento se convierte en una demostración con poco trabajo suplementario. (Véase la nota 9.1).

Para  $0 < r < 1$  (caso no convexo) es necesario trabajar con el funcional  $J$  en vez de la ecuación de Euler, y hay que ir demostrando la

-----  
(\*) En el índice de resultados (p.179) se indican las páginas de los principales teoremas.

unicidad al mismo tiempo que se desarrolla el método de semejanza . La ecuación de Euler también se usa, y de manera esencial, para establecer una primera propiedad de unicidad (lema 7.1 "de prolongación única"). Por otra parte,  $U'(A_1) \neq 0$  es equivalente a que  $U$  tenga infinitos arcos y está estrechamente relacionado con la regularidad en el extremo del soporte, por lo que se presentan las dificultades explicadas en el párrafo 9 de la presente sección.

Citamos Sedov [1], Bluman-Cole [1] y Barenblatt [1] como referencias generales sobre el método de semejanza para ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

En las partes IV y V estudiamos el problema  $\Gamma$ . Lo resumimos en los siguientes nueve pasos, asumiendo que  $\Gamma$  es "definida positiva" (1.1), "semi-monótona" (1.2) y absolutamente continua (1.3) . Los dos primeros pasos se encuentran en la parte II.

1. La hipótesis de positividad definida implica (teorema 5.1) que todas las funciones del conjunto de minimización verifican

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v'(x) = 0$$

2. Si  $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ , entonces  $u(x) = 0$  para todo  $x \geq x_0$ . Esto implica que  $u$  tiene a lo más una sucesión (numerable) de arcos contiguos de signo alternante. (Sección 5-D).

3. A partir de la hipótesis de semi-monotonía demostramos que  $u^{iv}$  es una medida no-positiva donde  $u > 0$  y no-negativa donde  $u < 0$  (lema 12.1). Por tanto  $u''$  es continua donde  $u \neq 0$  y  $u'$  tiene un conjunto de ceros "muy sencillo", lo que facilita varios pasos posteriores.

4. De 3 y 1 resulta que  $u$  tiene ceros arbitrariamente grandes y, por tanto, el soporte sólo puede ser no-compacto si  $u$  tiene infinitos arcos (sección 12).

5. Ecuación de Euler (teorema 16.1). Primeramente establecemos , donde  $u' \neq 0$  , un lema (el lema 13.1) de derivación de integrales paramétricas del tipo

$$\frac{d}{d\lambda} \int_c^d \Gamma(u(x) + \lambda \phi(x)) dx = \int_c^d \Gamma'(u(x) + \lambda \phi(x)) \phi(x) dx$$

Para este lema y para la ecuación de Euler donde  $u' \neq 0$  (sección 13) sólo se necesita la hipótesis de continuidad absoluta de  $\Gamma$ .

La ecuación de Euler es , salvo pequeños matices, una igualdad c.t.p. en el interior del soporte . Los puntos en que  $u' = 0$  se tratan con 3 y 2 (sección 16). Véase también el paso 8.

Al mismo tiempo que se obtiene la ecuación de Euler resulta que , en el interior del soporte,  $u^{iv}$  es una medida,  $u^{iv} \leq 0$  ,  $u'''$  es continua donde  $u' \neq 0$  y  $u''$  es continua.

Sin embargo, la distribución  $u^{iv}$  puede no ser una función ni una medida sobre  $R^+$  , a causa de la singularidad en el extremo del soporte. Ejemplo: el problema  $r$ -potencial con  $0 < r \leq 2/3$  (sección 11).

6. A partir de  $u^{iv} \leq 0$  obtenemos que

$$u'(a_n) u''(a_n) < 0 \quad , \quad u'(a_n) u'''(a_n) > 0 \quad (2.2)$$

Las condiciones de signos (2.2) están enunciadas en el teorema 17.1, pero son consecuencia inmediata de la ecuación integro-diferencial del teorema 16.2 y de la ecuación diferencial de tercer orden del teorema 16.3. Aquí se hace ya un primer estudio del comportamiento de  $u$  en  $a_\infty$ .

7. Compacidad del soporte con la hipótesis adicional

$$|\Gamma'(s)| \geq C|s|^{r-1} \quad \text{c.t.p.} \quad , \quad C > 0 \quad , \quad 0 < r < 2$$

Aplicando a cada arco de  $u$  un principio de comparación para el ope



rador  $y \rightarrow y^{iv}$  (con ciertas condiciones de contorno) y usando (2.2) se obtiene en la sección 18

$$|u'(a_{n+1})| < \frac{1}{2} |u'(a_n)| \quad (2.3)$$

y después en la sección 19

$$a_{n+1} - a_n < \text{Cte } |u'(a_n)|^{\frac{2-r}{2+r}} \quad (2.4)$$

de donde  $a_\infty = \sum(a_{n+1} - a_n) < \infty$  porque  $r < 2$ .

Cuando  $0 < r \leq 1$  (sección 20) el principio de comparación puede aplicarse directamente (a cada arco) porque comparamos con la ecuación  $y^{iv} = \pm 1$ . La idea de obtener (2.3) y acotar  $a_{n+1} - a_n$  mediante  $|u'(a_n)|$  a partir de (2.2) y la ecuación  $y^{iv} = \pm 1$  está en Hestenes y Redheffer [1]. La idea de combinar esto con un principio de comparación de cuarto orden se encuentra en Bidaut-Veron [3]. Para aplicar estas ideas a  $\Gamma$  no-convexa se necesitan los pasos anteriores, especialmente la ecuación de Euler.

Cuando  $1 < r < 2$  comparamos con la ecuación  $y^{iv} + y = 0$  y nos encontramos con la importante dificultad de que el operador  $y \rightarrow y^{iv} + y$  no verifica propiedades de positividad (o de comparación) en intervalos arbitrarios. Sección 19.

En la sección 22 damos una tercera demostración de compacidad del soporte para  $2/3 \leq r \leq 1$ , basada en la cota (2.6).

En las notas de la sección 18 puede verse un resumen con referencias sobre principios de comparación.

8. Continuidad de  $u'''$  en los ceros aislados de  $u'$  con la hipótesis adicional

$$\Gamma' \in L_{loc}^q(\mathbb{R} - \{0\}), \quad q > 2$$

Se estudia en la sección 14. Está basada en un lema del tipo del párrafo 5, pero de demostración bastante más delicada.

9. Regularidad en el extremo del soporte. Los resultados se enuncian en el teorema 21.1.

Cuando  $\Gamma$  es lipschitziana la continuidad de  $u'''$  (en todo  $\bar{R}^+$ ) se demuestra de manera muy directa en la sección 6 y después resulta fácilmente que  $u$  tiene infinitos arcos (por el teorema 12.1).

Pero cuando  $\Gamma'$  es no-acotada en el origen, nos encontramos con la siguiente dificultad: Si consideramos una función-prueba  $\phi$  idénticamente nula más allá de  $a_\infty$ , no obtenemos suficiente información por diferenciación del funcional  $J$ . Pero si  $\phi$  no es idénticamente nula más allá de  $a_\infty$ , entonces la diferenciación del funcional carece por completo de sentido. Lo que hacemos (lemas 15.1 y 15.4) es trabajar directamente con el funcional, buscando (por reducción al absurdo) una función que contradiga la definición de mínimo, sin usar ningún tipo de diferenciación.

La continuidad de  $u''$  en  $a_\infty$  (y en todo  $\bar{R}^+$ ) resulta asumiendo únicamente las tres hipótesis básicas (1.1), (1.2) y (1.3). Como contraejemplo, el problema de la sección 25 verifica estas hipótesis, salvo que  $\Gamma$  es discontinua en el origen, y  $u''$  ya no es continua en  $a_\infty$ .

La continuidad de  $u'''$  en  $a_\infty$  resulta con la hipótesis adicional

$$\Gamma' \in L_{loc}^q(\mathbb{R}), \quad q > 3 \quad (2.5)$$

e involucra la previa demostración de que  $u$  tiene infinitos arcos (lema 15.4) y la cota (teorema 17.5)

$$|u'''(a_n)| \leq Cte |u'(a_n)|^{\frac{3r-2}{2+r}} \quad (2.6)$$

donde  $r$  es aquí tal que

$$\Gamma(s) \leq Cte |s|^r \quad (2.7)$$

$\Gamma' \in L^q$  implica (lema 5.1) que  $\Gamma$  es holderiana de índice

$$r = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q'} \quad (2.8)$$

Así,  $q > 3$  en (2.5) implica  $r > 2/3$  en (2.7) y por tanto el exponente de (2.6) es positivo.

La relación (2.8) entre los exponentes  $q$  y  $r$  es heurísticamente muy orientativa en cuanto a comparar las propiedades de regularidad correspondientes a la función  $\Gamma$  con las correspondientes a una potencia.

Las cotas geométricas como (2.3) y (2.6) son la clave para demostrar las propiedades de continuidad absoluta global y de integrabilidad global.

En la parte VI profundizamos en el estudio del problema  $r$ -potencial, a base de combinar el método de semejanza, los métodos de las partes IV y V y propiedades de continuidad en los parámetros  $(\alpha, \beta, r)$ . En particular, resolvemos varias cuestiones pendientes cuando  $r \leq 2/3$ . Son piezas clave de la cadena deductiva el lema 15.1 (continuidad de  $u''$  en  $a_\infty$  en el caso de un número finito de arcos) y el lema 8.5, que nos da la monotonía en  $(0, a_1)$  de la función

$$\frac{u'(x)}{u(x)^{\frac{2+r}{4}}}$$

El exponente  $(2+r)/4$  lo escribiremos casi siempre con otra notación en la que (\*)

$$\frac{2+r}{4} = 1 - \frac{1}{m}$$

En la sección 26 obtenemos que  $U$  tiene infinitos arcos para  $r > (2/3) - \varepsilon_0$  y un sólo arco para  $r$  próximo a cero. El número  $(2/3) - \varepsilon_0$  se acota en la sección 29. Notemos que si  $U$  tiene infinitos arcos el problema  $\alpha\beta r$  tiene solución única para todo  $(\alpha, \beta)$ :

-----  
(\*) El uso del parámetro  $m$  se justifica por los resultados de las págs. 62, 64, 68 y 152.

teorema 9.1. Cuando  $U$  tiene un solo arco, entonces es  $U \geq 0$  en  $R^+$  y es igual a la solución del problema con la restricción  $v \geq 0$  estudiada en la sección 31. (\*)

En la sección 28 resolvemos totalmente la cuestión de la unicidad y de la no unicidad. Para cada  $r$  en un entorno de cero existe un par de datos de contorno  $(\alpha, \beta)$ , único "salvo semejanzas", tal que el problema  $\alpha\beta r$  tiene exactamente dos soluciones; una de ellas es  $\geq 0$  en  $R^+$  y la otra toma valores negativos. La solución es única para el resto de los valores de  $(\alpha, \beta, r)$ .

En la parte VII damos otros resultados -especialmente de soporte compacto - obtenibles por métodos análogos. Destacamos que si en el funcional del problema  $\alpha\beta r$  ponemos  $|u|^p$  en vez de  $u^2$ , resulta que el soporte de las soluciones es compacto si  $0 < r < p$  (sección 32).

-----  
(\*) En la p. 171 (nota de la sección 31) se da otra demostración de que  $u$  tiene infinitos arcos si  $r \geq 2/3$ .

### 3. Modelo físico

Nuestro modelo físico es la versión en teoría de barras de ciertos modelos para placas desarrollados en Ilyushin [1], Kachanov [1] y Langenbach [1], [2]. En la sección 60 de Pisarenko et al. [1] pueden verse las líneas básicas para construir directamente el modelo de barras. Las hipótesis generales de estos modelos son la "linealidad geométrica" (o "pequeñas deformaciones") y una ley elástica no lineal. Las leyes elásticas no lineales aparecen no sólo por sí mismas como en Pisarenko et al. [1], sino también como una de las formas de enfocar la teoría de la plasticidad: véase p. ej. en Kachanov [2] la teoría deformativa de la plasticidad y las relaciones de Hencky.

Comentamos que en la teoría de placas de von Karman las hipótesis son justamente las "opuestas" a las anteriores, es decir, geometría no lineal ("grandes deformaciones") y ley elástica lineal de Hooke. (Dicha teoría de von Karman puede verse p. ej. en Lions [1], sección 4 del capítulo 1, o en Langenbach [2]).

Pasamos a dar una breve descripción de nuestro modelo físico. La ecuación de equilibrio de la barra es

$$\frac{d^2}{dx^2} \alpha(u''(x)) + \gamma(u(x)) = g(x)$$

que es la ecuación de Euler asociada al funcional de energía

$$\int_0^C \Lambda'(u''(x)) dx + \int_0^C \Gamma(u(x)) dx - \int_0^C g(x) u(x) dx$$

con

$$\alpha(s) = \Lambda'(s) \qquad \gamma(s) = \Gamma'(s)$$

La fuerza aplicada por unidad de longitud está dada por  $g$ . En nuestro problema  $\Gamma$  es  $g=0$ . El caso  $g \neq 0$  se examina en la sección 30.

El término  $\gamma(u(x))$  representa un vínculo elástico, apoyo o campo de fuerzas no lineal. Por ejemplo, en el problema  $r$ -potencial

$$\gamma(s) = |s|^{r-1} \operatorname{sgn} s$$

Si consideramos fuerzas eléctricas, obtenemos modelos con  $r < 1$  y, en general, con  $\Gamma$  no convexa. La hipótesis de semi-monotonía (1.2) sobre  $\Gamma$  significa que estas fuerzas son atractivas.

Para  $r=1$  el modelo más natural es una barra pesada flotante. El término  $\operatorname{sgn} u$  de la ecuación de Euler representa el peso de la barra donde  $u > 0$  y la fuerza de flotación neta donde  $u < 0$ .

La linealidad geométrica lleva a identificar  $u''$  con la curvatura.

La función  $\alpha(s)$  está directamente relacionada con la ley tensión-deformación del material de la barra;  $\alpha(u''(x))$  representa el momento flector. Las leyes no lineales en forma de potencias llevan a

$$A(s) = |s|^p, \quad p > 1$$

En resistencia de materiales se consideran leyes de esta forma -incluso en pequeñas deformaciones - para materiales tales como fundición y piedra. Véase de nuevo la sección 60 de Pisarenko et al. [1], quienes justamente aplican dichas leyes a barras.

Cuando  $p=2$  el material de la barra sigue una ley lineal de Hooke. Así pues, en el problema  $\Gamma$  del presente trabajo la no-linealidad está sólo en el término  $\gamma(u(x))$ .

El caso general  $p \neq 2$  se examina en la sección 32. El soporte de las soluciones resulta ser compacto para  $r < p$ .

Por otra parte, recordamos que el trabajo de Berkovitz-Pollard [1] procede de un problema de filtrado óptimo que físicamente no tiene nada que ver con la teoría de barras.



## PARTE II

### RESULTADOS PRELIMINARES

En esta parte por un lado exponemos algunos resultados conocidos y su aplicación al problema  $\Gamma$  ; por otro lado, demostramos varios teoremas que no hemos visto enunciados expresamente en la literatura, pero cuya demostración sigue pautas conocidas.

Los teoremas 5.1 y 5.2 y el lema 5.5 serán de uso constante en este trabajo. (Págs. 34, 36 y 35, respectivamente).





#### 4. Teoremas de existencia y de problema bien puesto

Teorema 4.1 (de existencia). Dados  $1 < p < \infty$  y las funciones  $f \in L^{p'}(R^+)$  y  $\Gamma, B : R \rightarrow \bar{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , consideramos el problema de minimizar

$$J(v) = \int_0^\infty |v''(x)|^p dx + \int_0^\infty B(v'(x)) dx + \int_0^\infty \Gamma(v(x)) dx - \int_0^\infty f(x)v''(x) dx$$

en el conjunto de las funciones localmente integrables tales que

$$v'' \in L^p(R^+) \quad , \quad \int_0^\infty B(v'(x)) dx < \infty \quad , \quad \int_0^\infty \Gamma(v(x)) dx < \infty$$

y que verifican las condiciones de contorno  $v(0)=\alpha$  ,  
 $v'(0)=\beta$ .

Si las funciones  $\Gamma$  y  $B$  son inferiormente semicontinuas y el conjunto de minimización es no vacío, entonces este problema tiene al menos una solución.

Comentamos que el conjunto de minimización es no vacío para todo  $(\alpha, \beta)$  si  $\Gamma$  y  $B$  son localmente acotadas (p.ej. continuas) y  $\Gamma(0)=B(0)=0$ , puesto que existen funciones de  $C^2(R^+)$  y de soporte compacto que verifican las condiciones de contorno.

Las funciones  $B(v'(x))$  y  $\Gamma(v(x))$  son medibles por el lema 1.2 y/o el lema 1.3, con lo cual las integrales de  $J(v)$  tienen sentido.

Este teorema entra dentro del tipo de los teoremas de existencia tratados en Morrey [1]. El caso particular  $p=2$ ,  $\Gamma(s)=|s|$ ,  $B=0$ ,  $f=0$  de la siguiente demostración puede verse en Berkovitz y Pollard [1].

Sea  $M$  el infimo de  $J$ , que a priori podría ser  $-\infty$ . Sólo el último sumando de  $J(v)$  puede ser negativo. Sea  $\{v_n\}$  una sucesión minimizante. Veamos que  $\|v_n''\|_p$  está acotada. En efecto, si no fuera así para alguna subsucesión tendríamos

sección 4

$$J(v_n) \geq \|v_n\|_p^p - \|f\|_p \|v_n\|_p \rightarrow +\infty$$

Contradicción. Por tanto

$$\int_0^\infty |v_n|^p \leq Cte, \quad \int_0^\infty B(v_n') \leq Cte, \quad \int_0^\infty \Gamma(v_n) \leq Cte \quad (4.1)$$

para alguna constante independiente de  $n$ . Por compacidad débil de  $L^p(1 < p < \infty)$  extraemos una subsucesión (que seguimos llamando  $v_n$ ) tal que  $v_n$  converge débilmente hacia una cierta función  $w$  de  $L^p(\mathbb{R}^+)$ . Llamemos  $u$  a la primitiva segunda de  $w$  que verifica las condiciones de contorno, es decir :

$$u(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t) w(t) dt$$

Vamos a probar que  $u$  es solución del problema.

La convergencia débil de  $v_n$  hacia  $w=u''$  y la fórmula

$$v_n(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t) v_n''(t) dt \quad (4.2)$$

muestran que  $v_n(x) \rightarrow u(x)$  puntualmente para todo  $x \geq 0$ .

Análogamente  $v_n'(x) \rightarrow v'(x)$  para todo  $x \geq 0$ . Como  $\Gamma$  es semi-cont. inf.,  $\Gamma(u(x)) \leq \liminf \Gamma(v_n(x))$ . Entonces por (4.1) y el lema de Fatou :

$$\int_0^\infty \Gamma(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \Gamma(v_n)$$

Usando esta desigualdad, la análoga para  $B(u')$ , la semi-continuidad inf. débil de la norma  $L^p$  y (4.1) otra vez, obtenemos cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J(u) &\leq \liminf \int_0^\infty |v_n|^p + \liminf \int_0^\infty B(v_n') + \liminf \int_0^\infty \Gamma(v_n) \\ &= \lim \int_0^\infty f v_n'' \leq \liminf J(v_n) = M \end{aligned} \quad (4.3)$$

puesto que  $\lim J(v_n) = M$  por construcción. Como  $u$  pertenece al conjunto de minimización resulta  $J(u) = M = -\infty$  y  $u$  es solución del problema.

#### Notas

a) Este teorema es aplicable a todos los problemas tratados en el presente trabajo, excepto el de la sección 33, cuya demostración de existencia requiere unas modificaciones insignificantes. Al permitir que  $B$  y  $\Gamma$  tomen el valor  $+\infty$ , el teorema incluye inecuaciones variacionales: p.ej. sección 31.

b) Si  $\Gamma(s) \geq Cte |s|^r$  con  $r > 1$ , puede añadirse en  $J(v)$  el término :

$$-\int_0^\infty f_1(x) v(x) dx, \quad f_1 \in L^{r'}(R^+)$$

pues entonces puede extraerse de  $\{v_n\}$  una subsucesión débilmente convergente en  $L^r$ .

El teorema siguiente viene a decir que el problema de minimización está bien puesto, en un sentido próximo al de Tikhonov (ver Vainberg [1]), siempre y cuando se conozca además la unicidad.

#### Teorema 4.2 Hipótesis y notación como en el teorema 4.1.

Dada cualquier sucesión minimizante  $\{v_n\}$ , existe una subsucesión (que designaremos igualmente  $v_n$ ) y una solución  $u$  del problema tales que

$$I. \quad v_n'' \rightarrow u'' \quad \text{fuertemente en } L^p(R^+)$$

$$II. \quad \int_0^\infty B(v_n') \rightarrow \int_0^\infty B(u') \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \Gamma(v_n) \rightarrow \int_0^\infty \Gamma(u)$$

$$III. \quad v_n \rightarrow u \quad \text{y} \quad v_n' \rightarrow u' \quad \text{uniformemente en cada compacto de } [0, \infty).$$

IV. Si el problema tiene solución única, todo lo anterior se cumple para la sucesión minimizante dada inicialmente (sin extraer ninguna subsucesión).

El punto IV será consecuencia de los anteriores, pues si  $u$  es única toda subsucesión convergente de  $\{v_n\}$  converge hacia  $u$ ; y análogamente las sucesiones de II y III.

Consideremos (4.3). Como  $M=J(u)$ ,  $\int f u = \lim \int f v_n$  y los otros sumandos son no-negativos, resulta

$$\int_0^\infty |u|^p = \liminf \int_0^\infty |v_n|^p \quad \int_0^\infty B(u') = \liminf \int_0^\infty B(v_n') \quad \int_0^\infty \Gamma(u) = \liminf \int_0^\infty \Gamma(v_n)$$

Extrayendo subsucesiones que converjan a los respectivos  $\liminf$ , obtenemos el punto II del teorema y además

$$\|v_n\|_p \rightarrow \|u\|_p$$

lo que prueba el punto I, porque en  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , la convergencia débil junto con la convergencia numérica de la sucesión de las normas implican la convergencia fuerte. (Ver en Kantorovich y Akilov [1], cap. VIII; teorema 4 (1.VIII), una demostración directa para los  $L^p$ . En Barbu [1], proposición 1.4, puede verse una demostración para los espacios uniformemente convexos. La convexidad uniforme de los  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , está demostrada p.ej. en Sobolev [1] o Adams [1]).

Pasamos a demostrar el punto III. Razonamos sólo para  $v_n$ , pues para  $v_n'$  es análogo. Sea  $S$  un intervalo compacto. Usando (4.2) y la desigualdad de Hölder :

$$|v_n(x) - u(x)| \leq Cte(S) \|v_n - u\|_p$$

donde la constante es independiente de  $n$  y de  $x$ . Por tanto el resultado ya establecido en el punto I nos da que  $v_n \rightarrow u$  uniform. en  $S$ .

Nota Aun cuando no haya convergencia fuerte de  $v_n''$ , la convergencia débil de  $v_n''$  y (4.2) implican por sí solas que para alguna subsucesión se cumple III. En tal caso la demostración de III se basa en el teorema de inyección compacta del espacio de Sobolev  $W^{2,p}(S)$  en  $C^1(S)$ .

5. Desigualdades que involucran derivadas  
y propiedades asintóticas

5-A Continuidad de Hölder e integrabilidad de potencias  
de la derivada

Lema 5.1 Sea  $S$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ , acotado o no. Si  $f' \in L^p(S)$  con  $1 < p \leq \infty$ , entonces para todos  $x, a \in \bar{S}$

$$I. |f(x) - f(a)| \leq \|f'\|_p |x - a|^{1/p'}$$

$$II. \text{ Si además } p \neq \infty, \quad f(x) - f(a) = o(|x - a|^{1/p'}) \text{ cuando } x \rightarrow a$$

La demostración resulta de la desigualdad de Hölder. Puede verse en Hardy, Littlewood y Pólya [1], teorema 222. Notemos que la  $o$  del punto II es minúscula.

Nota Para funciones Lip es válido un resultado recíproco (ver lema 1.1). En cambio, las funciones hölderianas pueden no ser absolutamente continuas ni de variación acotada, incluso en compactos.

5-B Desigualdades de Nirenberg y Gagliardo en dimensión uno

En los dos lemas siguientes enunciamos parte de las desigualdades de Nirenberg [1] (también pueden verse en el libro de Friedman [1]) y Gagliardo [2]. La presentación de Nirenberg está directamente adaptada a nuestros propósitos.

Lema 5.2 Sea  $S$  un intervalo no acotado de  $\mathbb{R}$ . Si  $f \in L^r(S)$  y  $f^{(m)} \in L^p(S)$ ,  $0 < r \neq \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  entonces para todo  $t$  tal que  $r < t \leq \infty$  se verifica

$$\|f\|_t \leq Cte \|f^{(m)}\|_p^a \|f\|_r^{1-a}$$

donde la constante depende sólo de  $(m, p, t, r)$ ,  $m$  es un entero  $\geq 1$  y

$$a = \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{t} \right) / \left( \frac{1}{r} + m - \frac{1}{p} \right)$$

Lema 5.3 Sea  $S$  un intervalo no acotado de  $R$ .

Si  $f \in L^r(S)$  y  $f^{(m)} \in L^p(S)$ ,  $0 < r \leq \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  entonces para todos  $m, j$  enteros tales que  $0 < j < m$  se verifica

$$\|f^{(j)}\|_q \leq Cte \|f^{(m)}\|_p^a \|f\|_r^{1-a}$$

$$\text{donde } a = \frac{j}{m}, \quad \frac{1}{q} = a \frac{1}{p} + (1-a) \frac{1}{r}$$

La constante puede escogerse de forma que sólo dependa de  $(m, j)$ .

El enunciado del correspondiente teorema de Nirenberg [1] no incluye la posibilidad  $0 < r < 1$ . Sin embargo, Nirenberg explica en el texto de su artículo la validez del lema 5.3 para todo  $r > 0$ . El caso  $m=1$  del lema 5.2 está demostrado para todo  $r > 0$  por Sz.-Nagy en 1941 (ver Beckenbach y Bellman pág. 167) y el caso  $m$  general se obtiene aplicando el lema 5.3 al caso  $m=1$ .

En el lema 5.2 se tiene que  $0 < a \leq 1$ ; y  $a=1$  sólo si  $t=\infty$  y  $m=p=1$ .

En el lema 5.3  $0 < a < 1$  y  $\min\{p, r\} \leq q \leq \max\{p, r\}$ , El valor de  $q$  dado en el lema es el menor posible. Por el lema 5.2  $f^{(j)} \in L^t(S)$  para todo  $t > q$ .

Nota Si  $f \in L^{r_1} \cap L^{r_2}$  ( $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$ ), entonces  $f \in L^t$  para todo  $t$  entre  $r_1$  y  $r_2$ , en virtud de la desigualdad de interpolación standard entre espacios  $L^r$  sobre cualquier conjunto medible de  $R^N$ :

$$\|f\|_t \leq \|f\|_{r_1}^a \|f\|_{r_2}^{1-a}$$

$$\text{donde } \frac{1}{t} = a \frac{1}{r_1} + (1-a) \frac{1}{r_2}$$



Esta desigualdad permite reducir la demostración del lema 5.2 al caso  $t=\infty$ .

#### 5-C Anulación en $\infty$ de las funciones del conjunto de minimización

Lema 5.4 Sea  $f \in C^m(R^+, R)$  que verifique las dos hipótesis siguientes :

- 1) Para todo  $\epsilon > 0$ , la medida del conjunto

$$E_\epsilon(x) = \{y \in [x, x+1] : |f(y)| > \epsilon\}$$

converge hacia cero cuando  $x \rightarrow \infty$ .

- 2)  $f^{(m)}$  es uniformemente continua en  $R^+$ .

Entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(j)}(x) = 0$  ,  $0 \leq j \leq m$ .

Este lema es un caso particular del teorema 1 de Redheffer y Walter [1]. La hipótesis 1) se cumple, desde luego, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . También muchas condiciones de integrabilidad implican la hipótesis 1), como puede apreciarse en el siguiente teorema.

Teorema 5.1 Si en el problema  $\alpha\beta\Gamma$  la función  $r$  es "definida positiva", esto es :

$$r(0) = 0 \quad \text{e} \quad \inf_{|t| \geq |s|} r(t) > 0 \quad \text{si} \quad s \neq 0$$

entonces para toda  $v$  del conjunto de minimización de dicho problema

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v'(x) = 0$$

En particular,  $v$  y  $v'$  están acotadas en  $R^+$ .

En efecto, apliquemos a  $v$  el lema anterior con  $m=1$ :  $v'$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^+$  por el lema 5.1. Además

$$\int_x^{x+1} \Gamma(v(y)) dy \geq \int_{E_\epsilon(x)} \Gamma(v(y)) dy \geq |E_\epsilon(x)| \inf_{|t|>\epsilon} \Gamma(t)$$

Por hipótesis este ínfimo es  $>0$  y  $\int_0^\infty \Gamma(v) < \infty$ . Por tanto  $|E_\epsilon(x)| \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Q.E.D.

Comentamos que si  $\Gamma(s) \geq Cte |s|^r$ ,  $r > 0$ , la conclusión del teorema puede obtenerse de los lemas 5.2 y 5.3 del siguiente modo: 1) En el lema 5.2 se toma  $t=\infty$ ,  $S=(x_0, \infty)$  y se hace  $x_0 \rightarrow \infty$ . Así resulta  $v(\infty)=0$ . 2) Por el lema 5.3  $v' \in L^1$  y se aplica el mismo razonamiento.

La hipótesis del teorema es, desde luego, mucho más general: 1) que  $\Gamma(s) \geq Cte |s|^r$  (ver ejemplos de la sección 1-D).

Nota bibliográfica Los teoremas de Redheffer-Walter [1] se refieren a funciones con valores en un Banach definidas en un abierto de  $\mathbb{R}^N$  que verifica una condición del cono. Generalizan el teorema de las tres derivadas de Hadamard-Littlewood: si  $f(x) = o(1)$  y  $f''(x) = O(1)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces  $f'(x) = o(1)$ . Las desigualdades de Nirenberg [1] y Gagliardo [2] también pueden considerarse desde esta perspectiva. Ver más referencias y resultados en Redheffer [2], Beckenbach-Bellman [1], Hardy-Littlewood-Pólya [1].

Las desigualdades de Nirenberg-Gagliardo han sido extendidas por Lions [2] a funciones con valores en espacios de Banach.

#### 5-D Propiedades de los ceros y del soporte de las soluciones

Lema 5.5 Sea  $u$  una solución del problema  $\alpha \Delta \Gamma$  con  $\Gamma \geq 0$  y  $\Gamma(0)=0$ . Si  $u(x_0)=u'(x_0)=0$ , entonces  $u(x)=0$  para todo  $x \geq x_0$ .

Sea  $v$  cualquier prolongación de  $u$  para  $x \geq x_0$  que pertenezca al conjunto de minimización. Si  $v''=0$  c.t.p. en  $(x_0, \infty)$  la única prolongación admisible coincide con la enunciada en el lema (recuérdese que  $v'$  es absolutamente continua). Si, por el contrario,  $v'' \neq 0$  en un conjunto de medida positiva de  $(x_0, \infty)$ , entonces el valor del funcional es estrictamente mayor y  $v$  no es solución del problema.

(No es necesario que  $\Gamma$  sea "definida positiva" ni que la solución del problema  $\alpha\beta\Gamma$  sea única).

**Teorema 5.2** Sea  $u$  una solución del problema  $\alpha\beta\Gamma$  con  $\Gamma \geq 0$  y  $\Gamma(0)=0$ . Sea  $a_\infty$  (finito o  $+\infty$ ) el extremo superior del soporte de  $u$ . Entonces

- I. El soporte de  $u$  es o bien  $\bar{R}^+$ , o bien un intervalo compacto de la forma  $[0, a_\infty]$ .
- II. Los ceros de  $u$  del interior del soporte forman o bien un conjunto finito; o bien una sucesión (numerable) creciente con límite  $a_\infty$ . En dichos ceros es  $u' \neq 0$ .

El punto I nos dice que el soporte es un conjunto conexo. En efecto, sea  $A$  el complementario del soporte en  $R^+$  y sea  $x_0 \in A$ . Por definición de soporte  $A$  es un abierto y  $u(x) = 0$  en un entorno de  $x_0$ , luego también  $u' = 0$  y el lema anterior nos da  $(x_0, \infty) \subset A$ . Luego  $A$  es o bien vacío o bien una semi-recta.

Pasamos al punto II. Que  $u' \neq 0$  en esos ceros es evidente del lema. Por ser  $u'$  continua, estos ceros son puntos aislados, luego sólo hay un número finito en cada compacto contenido en  $(0, a_\infty)$ . Si el número de dichos ceros en  $(0, a_\infty)$  es finito no hay nada más que probar. Si es infinito, sea  $\{a_n\}$  la sucesión creciente formada con los ceros, y sea  $c$  su límite. Si  $c = +\infty$ , es claro que  $a_\infty = +\infty$ . Si  $c$  es finito, el lema anterior nos dará  $c = a_\infty$  tan pronto sepamos que  $u(c) = u'(c) = 0$ .

Calculando el límite de  $u$  a lo largo de  $\{a_n\}$  resulta efectivamente  $u(c)=0$ . Como entre cada dos ceros de  $u$  hay algún cero de  $u'$  (teorema de Rolle), también tenemos una sucesión de ceros de  $u'$  que tiende hacia  $c$ , luego  $u'(c)=0$ .

Los métodos de este apartado fueron ya utilizados por Berkovitz y Pollard [1].

### 6. Casos en que $\Gamma$ es Lip, $C^1$ o convexa

Recordamos que  $u$  designa una solución cualquiera del problema  $\alpha\beta\Gamma$ , salvo que indiquemos expresamente otra cosa.

#### 6-A Caso en que $\Gamma$ es lipschitziana

##### Lema 6.1

I. Sea  $A$  un abierto de  $R$  y sea  $\Omega = u^{-1}(A)$ . Entonces

$$u^{iv} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{si} \quad \Gamma \in \text{Lip}_{L^\infty}(A)$$

II.  $u^{iv} \in L^\infty(R^+)$  si  $\Gamma \in \text{Lip}_{L^\infty}(R)$  y  $u \in L^\infty(R^+)$  ó si  $\Gamma \in \text{Lip}(R)$

En el segundo caso  $\|u^{iv}\|_\infty \leq C$  siendo  $C$  la constante de Lipschitz de  $\Gamma$ .

Damos una demostración del punto I que, con ligeras modificaciones, es válida también para el punto II.

Basta ver que  $u^{iv}$  pertenece a  $L^\infty$  en un entorno de cada punto de  $\Omega$ . Sea  $S$  una bola abierta con  $\bar{S} \subset \Omega$ . Por tanto  $u(\bar{S})$  es un compacto de  $A$ . Sea  $A_1$  un abierto y  $K$  un compacto tales que

$$u(\bar{S}) \subset A_1 \subset K \subset A \quad (6.1)$$

Sea cualquier  $\phi \in C_0^\infty(S)$ . Llamaremos igual a su prolongación por cero a todo  $R^+$ . Dado que  $u + \lambda\phi$  pertenece al conjunto de minimización, tenemos

$$0 \leq J(u + \lambda\phi) - J(u) = \frac{1}{2} \int_S (u'' + \lambda\phi'')^2 - u''^2 + \int_S (\Gamma(u + \lambda\phi) - \Gamma(u)) \quad (6.2)$$

(Evidentemente, da lo mismo poner  $S$  que  $R^+$  en estas integrales).

Por (6.1) y el teorema del máximo absoluto, para  $\lambda$  suficientemente pequeño la imagen de  $S$  por  $u + \lambda\phi$  está contenida en  $K$ . La hipótesis de Lipschitz nos da entonces que para todo  $x \in S$  y todo  $\lambda$  en un entorno de cero se verifica la desigualdad siguiente

$$\Gamma(u(x) + \lambda \phi(x)) - \Gamma(u(x)) \leq C |\lambda| |\phi(x)| \quad (6.3)$$

donde  $C$  es la constante de Lipschitz de  $\Gamma$  en el compacto  $K$ . Obsérvese que  $C$  no depende de  $\phi$ . Llevando (6.3) a (6.2), dividiendo por  $|\lambda|$  y haciendo primero  $\lambda \rightarrow 0^+$ , después  $\lambda \rightarrow 0^-$ , obtenemos

$$\left| \int_S u'' \phi'' \right| \leq C \int_S |\phi|$$

Por definición de derivada distribucional,  $\langle u^{iv}, \phi \rangle = \int_S u'' \phi''$ . Luego la última desigualdad nos dice que la forma lineal  $u^{iv}$  es continua en  $C_0^\infty(S)$  con la norma de  $L^1$ . Como  $C_0^\infty(S)$  es denso en  $L^1(S)$ ,  $u^{iv}$  pertenece al dual de  $L^1(S)$ , es decir, a  $L^\infty(S)$ .

El caso  $\Gamma(s) = |s|$  del punto II fue ya demostrado por Berkovitz y Pollard [2].

Nota Generalización del lema 6.1 a dimensión  $N$ .

Si  $N < 4$ ,  $u$  es continua (ver p.ej. Schwarz [1]) y el lema es válido íntegramente con la misma demostración.

Si  $N \geq 4$  se mantiene el punto II del lema.

En particular, para  $\Gamma(s) = |s|$  (problema  $\alpha\beta r$  con  $r=1$ ), resulta que  $\Delta^2 u \in L^\infty$  cualquiera que sea  $N$ . Esto último está ya demostrado en Ekeland y Teman [1].

Corolario 6.1 Si  $\Gamma$  es "definida positiva" en el sentido (1.1) y  $\Gamma \in Lip_{\alpha\alpha}(R)$ , entonces  $u^{iv} \in L^\infty(R^+)$ , por tanto  $u''' \in Lip(\bar{R}^+)$  y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'''(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} u''(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty$$

En particular, todo lo anterior se cumple para el problema  $\alpha\beta r$  si  $r \geq 1$ .

Resulta del punto II del lema 6.1 junto con el teorema 5.1 y el lema 5.4.

Lema 6.2 Si  $\Gamma(s) = +\infty$  para  $s < 0$  y  $\Gamma$  es Lip en  $[0, q]$  para todo  $q > 0$ , entonces  $u''$  es una medida de Radon en  $\mathbb{R}^+$ .

La primera hipótesis sobre  $\Gamma$  impone  $v \geq 0$  para toda  $v$  del conjunto de minimización. La demostración es parecida a la del lema 6.1. Ahora tomamos  $\phi \geq 0$  y hacemos  $\lambda \rightarrow 0^+$ , pero no podemos hacer  $\lambda \rightarrow 0^-$ . Resulta

$$\langle u^{iv}, \phi \rangle + \text{Cte} \int \phi \geq 0$$

luego  $u^{iv} + \text{Cte}$  es una distribución no-negativa y por tanto (Schwartz [1]) es una medida.

#### 6-B Caso en que $\Gamma$ es $C^1$ : ecuación de Euler

Lema 6.3 Se verifica

$$u^{iv}(x) + \Gamma'(u(x)) = 0$$

en todo  $x \in \bar{\mathbb{R}}^+$  tal que  $\Gamma$  sea  $C^1$  en un entorno de  $u(x)$ .

Por tanto,  $u^{iv}$  es continua en dichos puntos.

Corolario 6.2 Para el problema  $r$ -potencial se verifica

$$u^{iv}(x) + C|u(x)|^{r-1} \operatorname{sgn} u(x) = 0$$

donde  $u \neq 0$  si  $0 < r \leq 1$ , en todo  $\bar{\mathbb{R}}^+$  si  $r > 1$ .

Estos resultados serán mejorados en las secciones 7 y 16.

El método de demostración es el clásico en cálculo de variaciones. La dificultad de que  $\Gamma$  no es  $C^1$  en todas partes se resuelve con una construcción como la de (6.1).

#### Notas

a) Si  $\Gamma'(s)$  es Lip en un entorno de  $s=0$ , el soporte de  $u$  es no-compacto, pues si lo fuera el problema de Cauchy en  $a_\infty$  tendría más de una solución, en contradicción con el teorema de Picard de existencia-unicidad para E.D.O. Ejemplo : el problema  $\alpha \beta r$  con  $r \geq 2$ . Insistimos en que aquí hablamos de  $\Gamma'$  Lip, no de  $\Gamma$  Lip.

b) En el problema  $r$ -potencial ( $r > 0$ ),  $u$  resulta ser analítica donde no se anula, en virtud de teoremas standard de E.D.O.

#### 6-C Caso en que $\Gamma$ es convexa : unicidad y otras propiedades

**Lema 6.4** Si  $\Gamma$  es convexa el problema  $\alpha\beta\Gamma$  tiene a lo más una solución. En particular, la solución del problema  $\alpha\beta r$  es única si  $r \geq 1$ .

(Válido en dimensión  $N$ ),

Recordamos que el funcional  $f \rightarrow \|f\|_2^2$  es estrictamente convexo (se obtiene de la desigualdad estricta de Minkowski para integrales, ver p.ej. Hardy-Littlewood-Pólya [1]).

Supongamos que el problema  $\alpha\beta\Gamma$  tiene dos soluciones  $u, \bar{u}$ , con  $u \neq \bar{u}$ . Entonces " $u \neq \bar{u}$ " en virtud de las condiciones de contorno. La función  $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\bar{u}$  pertenece al conjunto de minimización, pero

$$J\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\bar{u}\right) < \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(\bar{u}) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M$$

donde la desigualdad estricta proviene de usar en los sumandos de las derivadas segundas la convexidad estricta de  $f \rightarrow \|f\|_2^2$ . Puesto que  $J \geq M$ , la contradicción obtenida prueba que  $u = \bar{u}$ .

**Nota** Las condiciones de contorno de Dirichlet hacen innecesario que  $\Gamma$  sea "definida positiva" o que sea estrictamente convexa. Sí que necesitaríamos una de estas dos hipótesis para obtener unicidad con condiciones de contorno de Neumann o si el dominio es todo  $R$ .

En el caso unidimensional, las propiedades de regularidad de  $u$  cuando  $\Gamma$  es convexa están englobadas en otros resultados del presente trabajo. En efecto :



1. Si  $\Gamma$  es convexa y finita en todo  $\mathbb{R}$ , entonces es localmente Lip y entra dentro del lema 6.1 (ver también el corolario 6.1).

2. Si  $\Gamma$  es convexa,  $\geq 0$ , s.c.i., y tal que  $\Gamma(0)=0$  y  $\Gamma(s_0) \neq +\infty$  para algún  $s_0 \neq 0$ , entonces  $u^{iv}$  es una medida de Radon sobre  $\mathbb{R}^+$ . Resulta de combinar los lemas 6.1, 6.2 y 12.1. (Obsérvese que  $\Gamma$  convexa,  $\geq 0$  y  $\Gamma(0)=0$  implican  $\Gamma$  "semi-monótona" en el sentido (1.2)).

En dimensión  $N$  citamos lo siguiente (ver Bidaut-Veron [4], teorema 4.1, corolario 4.1 y teorema 5.1) :

3. Si  $\Gamma$  verifica las hipótesis del párrafo 2 anterior y además  $|\Gamma'(s)| \geq Cte |s|$ , entonces  $\Delta^2 u$  también es una medida de Radon.

4. Si, además de 3,  $\Gamma$  es finita en todo  $\mathbb{R}$ , entonces  $\Delta^2 u \in L^\infty + L^1$ ,  $u$  verifica la ecuación de Euler en sentido multívoco c.t.p. :

$$-\Delta^2 u(x) \in \Gamma'(u(x))$$

y además el problema de minimización puede caracterizarse mediante la ecuación multívoca. Esto último fué ya demostrado por Ekeland y Teman [1] en el caso particular  $\Gamma(s)=|s|$ .

La ecuación de Euler (para  $\Gamma$  no  $C^1$ ) que estudiamos en la sección 16 del presente trabajo no es en sentido multívoco, sino de igualdad c.t.p. en el interior del soporte. Los resultados de la sección 16 admiten  $\Gamma$  convexa como caso particular, pero no están basados en el concepto de convexidad. En nuestra opinión, el concepto de ecuación multívoca no es útil para  $\Gamma$  no-convexa.

## PARTE III

EL PROBLEMA  $r$ -POTENCIAL Y EL METODO DE SEMEJANZA

En esta parte es importante tener presente el convenio de signos sobre  $\alpha$ ,  $\beta$  (pág. 9):  $\alpha \geq 0$  y  $\beta > 0$  si  $\alpha = 0$ , de modo que  $u > 0$  cerca del origen.

La constante  $C$  se mantiene fija mientras no se indique otra cosa. Notemos que, además, se puede pasar de un valor a otro de  $C$  mediante semejanzas del tipo del lema 8.1: véase la fórmula (9.7).

Las demostraciones de esta parte están basadas casi exclusivamente en el método de semejanza. Se exceptúa la deducción de la ecuación de Euler, que usa métodos de la parte IV. A su vez, sobre la ecuación de Euler se basan las demostraciones del lema 7.1 "de prolongación única" y de la existencia de ceros de  $u$ .

En la parte VI retomaremos el problema  $r$ -potencial combinando el método de semejanza con otros métodos. En particular, postponemos a la parte VI la demostración de que  $u$  tiene infinitos arcos si  $r > (2/3) - \epsilon$ , así como el estudio de  $u(x; \alpha, \beta)$  cuando el número de arcos es finito.

Gran parte del trabajo se dedica al caso  $0 < r < 1$ , ya que para  $r \geq 1$  disponemos de demostraciones mucho más breves, según se explica en la nota 9.1. Las afirmaciones sobre unicidad sólo tienen interés para  $0 < r < 1$ , pues para  $r \geq 1$  sabemos ya que la solución es única por convexidad (lema 6.4).

Los resultados fundamentales se agrupan en la sección 9.



7. Ecuación de Euler y lema de "prolongación  
única" para el problema  $\alpha\beta r$

Teorema 7.1 Consideremos el problema  $\alpha\beta r$ . Entonces para todo  $r > 0$

$$u^{iv} = -C|u|^{r-1} \operatorname{sgn} u \quad \text{en} \quad L_{loc}^1 [0, a_\infty)$$

Esta igualdad significa, de acuerdo con el lema 1.1, que  $u'''$  es absolutamente continua en todo compacto de  $[0, a_\infty)$ .

Para  $r > 1$  no ofrece ninguna dificultad ; de hecho es cierta una proposición más fuerte : el cololario 6.2. Para  $0 < r \leq 1$  sólo hay que estudiar los ceros de  $u$  en  $[0, a_\infty)$ . Por el teorema 5.2 es  $u' \neq 0$  en dichos ceros, con lo que es válida la demostración de la sección 13.

Lema 7.1 Sea  $u$  una solución del problema  $\alpha\beta r$  ( $r > 0$ ) y sea cualquier  $s > 0$ . Entonces  $u$  sólo admite una única prolongación más allá del punto  $s$  que sea solución del problema  $\alpha\beta r$ .

En este lema es esencial que  $s \neq 0$ . Otra redacción del lema es : "si dos soluciones  $u, \bar{u}$  del problema  $\alpha\beta r$  coinciden en  $(0, s)$ , entonces coinciden en  $\bar{R}^+$ ". (Sin embargo, puede haber dos soluciones distintas que no coincidan en ningún entorno del origen ; ver la sección 28).

Veamos la demostración (para  $0 < r < 1$ ). En los puntos en que  $u \neq 0$  la ecuación de Euler verifica la condición de Lipschitz del teorema de Picard de existencia-unicidad para E.D.O., luego en ellos no se puede perder la unicidad. Sea un punto donde  $u=0$  pero  $u' \neq 0$  ; por tanto  $u' \neq 0$  en un cierto entorno. Multiplicamos la ecuación de Euler (teorema 7.1) por  $u'$  e integramos, con lo que llegamos a

$$u' u''' - \frac{1}{2} u''^2 + \frac{C}{r} |u|^r = \text{cte}$$

En el entorno en que  $u' \neq 0$  podemos rebajar el orden de esta ecuación homogénea, obteniendo

$$w^3 \frac{d^2 w}{du^2} + \frac{1}{2} w^2 \left( \frac{dw}{du} \right)^2 + \frac{C}{x} |u|^r = \text{Cte}$$

donde  $w = du/dx$  y  $w$  se considera como función de  $u$ . Dado que  $u$  es la variable independiente y  $w \neq 0$ , se verifica la condición de Lipschitz antes mencionada y la unicidad tampoco puede perderse donde  $u' \neq 0$ . (El paso de  $w(u)$  a  $u(x)$  también conserva la unicidad). Por último, en los puntos donde  $u$  y  $u'$  son ambas cero,  $u$  se prolonga unívocamente por cero en virtud del lema 5.5.

#### Notas

a) El lema 7.1 se extiende al problema  $\Gamma$  si  $\Gamma$  cumple las hipótesis (1.1), (1.2), (1.3) y además  $\Gamma' \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R} - \{0\})$ . En la última hipótesis aparece la derivada  $\Gamma'$  y no  $\Gamma$ ; el origen puede excluirse gracias al lema 5.5.

b) El lema 7.1 puede reformularse en términos del problema de valor inicial de Cauchy en  $x=0$ . Ver la sección 23-A, donde se estudia la unicidad del problema  $\alpha\beta r$  por un método diferente.

### 8. Algunos lemas de semejanza y homogeneidad

Los lemas de esta sección son válidos para cualquier  $r > 0$ .

Las propiedades de semejanza se expresan en el lema 8.1. Combinando las propiedades de semejanza y homogeneidad obtenemos los lemas 8.2 y 8.3, los cuales incorporan también resultados de unicidad derivados del lema 7.1 "de prolongación única".

El lema 8.5 nos dará, por un lado, propiedades de unicidad de las fórmulas que relacionan una solución con otras. Por otro lado nos ayudará, en la parte VI, a dilucidar varias de las cuestiones más difíciles cuando  $r < 2/3$ . Los lemas 8.3, 8.4 y 8.5 pueden suprimirse si se renuncia a profundizar el estudio del caso  $r < 2/3$ .

Recordamos que  $a_1$  es el primer cero positivo de  $u$  (y  $\bar{a}_1$  de  $\bar{u}$ ). La existencia de  $a_1$  resulta de la ecuación de Euler donde  $u \neq 0$  (corolario 6.2) y el razonamiento de los lemas 12.2 y 12.3 (pág. 74).

$M(\alpha, \beta)$  designa aquí el mínimo del funcional  $J$  en el problema  $\alpha\beta r$ . No indicamos la dependencia en  $r$  (ni en  $C$ ) por permanecer fijos estos parámetros. También omitiremos frecuentemente la  $r$  final de "problema  $\alpha\beta r$ ".

Para  $r \neq 2$  definimos (\*)

$$m = \frac{4}{2-r} \quad (8.1)$$

y convenimos en poner  $0 = 1/m$  cuando  $r = 2$ . En las expresiones que contengan  $m$  tomaremos el límite cuando  $r \rightarrow 2$  como valor para  $r = 2$ .

A los cocientes de la forma

$$\frac{\beta}{1 - \frac{1}{m}} \quad \text{ó} \quad \frac{u'(s)}{u(s) \left(1 - \frac{1}{m}\right)} \quad \text{con} \quad 0 \leq s < a_1 \quad \left(1 - \frac{1}{m} = \frac{2+r}{4}\right)$$

convenimos en darles el valor  $+\infty$  cuando el denominador es cero.

(\*) El uso del parámetro  $m$  se justifica por los resultados de las págs. 62, 64, 68 y 152.

Lema 8.1 Sean  $u$  una solución del problema  $\alpha\beta r$  y  $\bar{u}$  una solución del problema  $\bar{\alpha}\bar{\beta}r$ . Si se cumple la igualdad

$$\frac{\beta}{\alpha^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^{1-\frac{1}{m}}} \quad (8.2)$$

entonces :

I.  $\tau\bar{u}(\sigma x)$  es una solución del problema  $\alpha\beta r$ , donde los números positivos  $\tau, \sigma$  están determinados por (8.3) y (8.4).

II. Si uno de los problemas  $\alpha\beta$  ó  $\bar{\alpha}\bar{\beta}$  tiene solución única, el otro también tiene solución única y se cumple

$$u(x) = \tau\bar{u}(\sigma x) \quad \text{para todo } x \geq 0$$

(Si  $\alpha=0$  (8.2) significa  $\bar{\alpha}=\alpha=0$ , según el convenio de dar el valor  $+\infty$ ). Comencemos por obtener condiciones necesarias sobre  $\tau, \sigma$ . Imponiendo que  $\tau\bar{u}(\sigma x)$  verifique las condiciones de contorno  $(\alpha, \beta)$  resulta :

$$\alpha = \tau\bar{\alpha} \quad \beta = \tau\sigma\bar{\beta} \quad (8.3)$$

Si  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$  la condición de compatibilidad de (8.3) con (8.2) se escribe

$$\left. \begin{array}{ll} \tau\sigma^m = 1 & \text{si } r \neq 2 \\ \sigma = 1 & \text{si } r = 2 \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

Si  $\alpha=0$  o  $\beta=0$  (8.3) no determina  $\tau, \sigma$ . Pero entonces escogemos  $\tau, \sigma$  de forma que cumplan (8.4).

Así pues, en todos los casos existen  $\tau, \sigma$  unívocamente determinados por (8.3) y (8.4).

Pasamos a la demostración del lema. Haciendo el cambio  $y=\sigma x$  en la expresión  $J(\tau\bar{u}(\sigma x))$  obtenemos :

$$J(\tau\bar{u}(\sigma x)) = \frac{1}{2} \tau^2 \sigma^3 \int_0^\infty \bar{u}''(y)^2 dy + \frac{C}{r} \frac{\tau^r}{\sigma} \int_0^\infty |\bar{u}(y)|^r dy$$

Téngase en cuenta que  $\frac{d^2}{dx^2} [\tau \bar{u}(\sigma x)] = \tau \sigma^2 \bar{u}''(\sigma x)$

En virtud de (8.4)  $\tau^2 \sigma^3 = \tau^r / \sigma$ , luego

$$J(\tau \bar{u}(\sigma x)) = \frac{\tau^r}{\sigma} J(\bar{u}) = \frac{\tau^r}{\sigma} M(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \quad (8.5)$$

Dado que  $\tau \bar{u}(\sigma x)$  por (8.3) verifica las condiciones de contorno  $(\alpha, \beta)$

$$M(\alpha, \beta) \leq J(\tau \bar{u}(\sigma x)) = \frac{\tau^r}{\sigma} M(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

Invirtiendo el razonamiento :

$$M(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \leq J\left(\frac{1}{\tau} u\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) = \frac{\sigma}{\tau^r} M(\alpha, \beta)$$

Las dos últimas desigualdades dan

$$M(\alpha, \beta) = \frac{\tau^r}{\sigma} M(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = J(\tau \bar{u}(\sigma x)) \quad (8.6)$$

y por tanto  $\tau \bar{u}(\sigma x)$  es una solución del problema  $\alpha\beta$ .

Pasamos a demostrar el punto II. La unicidad implica obviamente  $u(x) = \tau \bar{u}(\sigma x)$ . Solo falta ver que la unicidad de un problema implica la del otro. En efecto, si el problema  $\bar{\alpha}\bar{\beta}$  tuviera dos soluciones distintas  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$ , también serían  $\tau \bar{u}_1(\sigma x)$  y  $\tau \bar{u}_2(\sigma x)$  dos soluciones distintas del problema  $\alpha\beta$ . El razonamiento inverso es claramente también válido.

**Nota** El punto esencial está en el paso (8.5), que es donde se origina la relación (8.4). Esta misma relación se obtiene imponiendo que  $\tau \bar{u}(\sigma x)$  verifique la ecuación de Euler. A su vez la relación (8.4) sugiere plantear la hipótesis (8.2) y sus análogos de los lemas siguientes.

**Lema 8.2** Sean  $u$  y  $\bar{u}$  soluciones del problema  $\alpha\beta r$  y del  $\bar{\alpha}\bar{\beta}r$ ; respectivamente. Supongamos que existe  $\bar{s}$  tal que  $0 < \bar{s} < \bar{\alpha}_1$  y que

$$\frac{\beta}{\alpha^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{\bar{u}'(\bar{s})}{\bar{u}(\bar{s})^{1-\frac{1}{m}}}$$

Sean  $\tau, \sigma > 0$  determinados por (8.4) y por

$$\alpha = \tau \bar{u}(\bar{s}), \quad \beta = \tau \sigma \bar{u}'(\bar{s}) \quad (8.7)$$



Entonces el problema  $\alpha\beta r$  tiene solución única y

$$u(x) = \tau \bar{u}(\sigma x + \bar{s}) \quad \text{para todo } x \geq 0$$

Nota En la demostración que sigue se ve que puede suprimirse la hipótesis  $\bar{s} < \bar{a}_1$ , dejando sólo  $\bar{s} > 0$  y admitiendo  $\tau < 0$ . Preferimos redactarlo así porque con la condición  $\bar{s} < \bar{a}_1$  obtendremos que el número  $\bar{s}$  es único (corolario 8.1).

La función  $\bar{u}(x)$  para  $x \geq \bar{s}$  es solución del problema :

$$\min. \quad \frac{1}{2} \int_{\bar{s}}^{\infty} v''^2 + \frac{C}{r} \int_{\bar{s}}^{\infty} |v|^r \quad v(\bar{s}) = \bar{u}(\bar{s}), \quad v'(\bar{s}) = \bar{u}'(\bar{s}) \quad (8.8)$$

luego la función  $\bar{u}(x+\bar{s})$  es solución de :

$$\min. \quad \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v''^2 + \frac{C}{r} \int_0^{\infty} |v|^r \quad v(0) = \bar{u}(\bar{s}), \quad v'(0) = \bar{u}'(\bar{s}) \quad (8.9)$$

y en virtud de lema 8.1  $\tau \bar{u}(\sigma x + \bar{s})$  es solución de :

$$\min. \quad \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v''^2 + \frac{C}{r} \int_0^{\infty} |v|^r \quad v(0) = \tau \bar{u}(\bar{s}) = \alpha, \quad v'(0) = \tau \sigma \bar{u}'(\bar{s}) = \beta$$

(Recuérdese (8.7)). Hemos, pues, obtenido que  $\tau \bar{u}(\sigma x + \bar{s})$  es una solución del problema  $\alpha\beta r$ . Sólo falta demostrar la unicidad del problema  $\alpha\beta r$ . Invirtiendo el razonamiento anterior resulta que  $\frac{1}{\tau} u(\frac{x-\bar{s}}{\sigma})$  es una solución del problema (8.8) y puede tomarse como prolongación de  $\bar{u}$  para  $x \geq \bar{s}$  (en el sentido del lema 7.1). Si el problema  $\alpha\beta$  tuviera dos soluciones distintas tendríamos dos prolongaciones distintas de  $\bar{u}$  más allá del punto  $\bar{s}$ , lo que es imposible en virtud del lema 7.1. Nótese que aquí se usa la hipótesis  $\bar{s} > 0$ .

Lema 8.3 Sea  $u$  una solución del problema  $\alpha\beta r$  y  $\bar{u}$  una solución del problema  $\bar{\alpha}\bar{\beta}r$ . Supongamos que existen  $s, \bar{s}$  tales que  $0 \leq s < a_1$ ,  $0 \leq \bar{s} < \bar{a}_1$ ,  $s$  y  $\bar{s}$  no ambos cero y que

$$\frac{u'(s)}{u(s)^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{\bar{u}'(\bar{s})}{\bar{u}(\bar{s})^{1-\frac{1}{m}}}$$

Sean  $\tau, \sigma > 0$  determinados por (8.4) y por

$$u(s) = \tau \bar{u}(\bar{s}), \quad u'(s) = \tau \sigma \bar{u}'(\bar{s})$$

Entonces :

I. Si  $\bar{s} \geq \sigma s$  y  $\bar{s} \neq 0$  se verifica

$$u(x) = \tau \bar{u}(\sigma(x-s) + \bar{s}) \quad \text{para todo } x \geq 0$$

y si además  $\bar{s} > \sigma s$  el problema  $\alpha\beta r$  tiene solución única.

II. Si  $\bar{s} \leq \sigma s$  y  $s \neq 0$  se verifica

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{\tau} u\left(\frac{x-\bar{s}}{\sigma} + s\right) \quad \text{para todo } x \geq 0$$

y si además  $\bar{s} < \sigma s$  el problema  $\bar{\alpha}\bar{\beta}r$  tiene solución única.

Nota El caso  $s=\bar{s}=0$  es el lema 8.1. Si  $\bar{s}=\sigma s \neq 0$ , haciendo  $x=0$  en I ó II resulta (8.3) y también estamos en la situación del lema 8.1. En estos dos casos sólo puede afirmarse que los problemas  $\alpha\beta$  y  $\bar{\alpha}\bar{\beta}$  tienen o bien ambos solución única, o bien ambos no única.

Por otra parte, el lema 8.2 es, desde luego, un caso particular del lema 8.3.

La forma en que determinamos los números  $\tau, \sigma$  se justifica como en el lema 8.1.

Los puntos I y II son disyuntivos y la demostración de ambos es la misma, por lo que sólo demostramos el punto I.

Al igual que en (8.9),  $u(x+s)$  es solución del problema  $\alpha_1\beta_1$  con  $\alpha_1=u(s)$ ,  $\beta_1=u'(s)$ . Ahora aplicamos el lema 8.2 poniendo  $u(x+s)$  en vez de  $u(x)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1)$  en vez de  $(\alpha, \beta)$  y todo lo demás igual. (Aquí usamos la hipótesis  $\bar{s} \neq 0$ ). Obtenemos que el problema  $\alpha_1\beta_1$  tiene solución única y que

$$u(x+s) = \tau \bar{u}(\sigma x + \bar{s}) \quad \text{para todo } x \geq 0$$

Cambiando  $x$  por  $x-s$

$$u(x) = \tau \bar{u}(\sigma(x-s) + \bar{s}) \quad \text{para todo } x \geq s$$

Vamos a ver, por prolongación hacia la izquierda, que esta última igualdad se cumple para  $x \geq 0$ .  $u(x)$  es solución de la ecuación de Euler para  $x \geq 0$ . Usando la relación (8.4) se comprueba que  $\tau \bar{u}(\sigma(x-s) + \bar{s})$  es solución de la ecuación de Euler para  $\sigma(x-s) + \bar{s} \geq 0$ . Debido a la hipótesis  $\bar{s} - \sigma s \geq 0$ , la anterior desigualdad está implicada por  $x \geq 0$ . Como la ecuación de Euler verifica donde  $u \neq 0$  la propiedad de unicidad de sus trayectorias, la igualdad de  $u(x)$  y  $\tau \bar{u}(\sigma(x-s) + \bar{s})$  en  $(s, a_1)$  implica su igualdad en  $[0, s]$ .

Sólo nos falta demostrar la proposición sobre unicidad del problema  $\alpha\beta$ . (Antes vimos la unicidad del problema  $\alpha_1\beta_1$ , no la del  $\alpha\beta$ ). Haciendo  $x=0$  en la igualdad del punto I, resulta :

$$\alpha = \tau \bar{u}(\bar{s} - \sigma s) \quad , \quad \beta = \tau \sigma \bar{u}'(\bar{s} - \sigma s)$$

Eliminando  $\tau, \sigma$  entre estas dos igualdades y (8.4) :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\bar{u}'(\bar{s} - \sigma s)}{\bar{u}(\bar{s} - \sigma s)} = \frac{\bar{u}'(\bar{s})}{\bar{u}(\bar{s})} = \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{m}}$$

Podemos aplicar de nuevo el lema 8.2, poniendo  $\bar{s} - \sigma s$  en vez de  $\bar{s}$ . Como  $\bar{s} - \sigma s > 0$  por hipótesis, resulta que el problema  $\alpha\beta$  tiene solución única.

Lema 8.4 Si el problema  $\alpha\beta$  tiene dos soluciones distintas  $u, \bar{u}$ , entonces los dos conjuntos

$$\text{Imagen}_{0 < x < a_1} \frac{u'(x)}{u(x)^{1-\frac{1}{m}}} \quad , \quad \text{Imagen}_{0 < x < a_1} \frac{\bar{u}'(x)}{\bar{u}(x)^{1-\frac{1}{m}}}$$

tiene intersección vacía.

Para demostrarlo, vamos a aplicar el lema 8.3 con  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\alpha, \beta)$ . Supongamos (reducción al absurdo) que  $s$  y  $\bar{s}$ , respectivamente, dan el mismo punto de las imágenes. Si  $\bar{s} \neq \sigma s$  el lema 8.3 da directamente la unicidad del problema  $\alpha\beta$  (contradicción).

Si  $\bar{s} = 0s$ , el lema 8.3 de nuevo da :

$$u(x) = \tau \bar{u}(0x) \quad \text{para todo } x \geq 0$$

y haciendo  $x=0$  resulta  $\alpha = \tau\alpha$ ,  $\beta = \tau\sigma\beta$ , luego  $\tau = \sigma = 1$  y  $u(x) = \bar{u}(x)$  : contradicción.

**Lema 8.5** *Dados cualquier  $r > 0$  y cualquier  $(\alpha, \beta)$ , sea  $u$  una solución del problema  $\alpha\beta r$ . Entonces la función*

$$h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^{1-\frac{1}{m}}}$$

es o bien estrictamente monótona en  $(0, a_1)$ , o bien una constante  $K_1$  en  $(0, a_1)$ . En el segundo caso  $a_1 = a_\infty$  y

$$u(x) = \begin{cases} K(a_1 - x)^m & \text{si } 0 \leq x \leq a_1 \\ 0 & \text{si } x \geq a_1 \end{cases} \quad (8.10)$$

donde  $K > 0$  y  $K_1 = -mK^{1/m}$ .

#### Notas

a) Equivale a decir que  $u^{1/m}$  es o bien estrictamente cóncava, o bien estrictamente convexa o bien lineal. (Por integración de  $h$ ).

b) En la parte VI veremos que  $h$  sólo puede ser constante o creciente si  $r < 2/3$ ,  $\beta \leq -mK^{1/m} \alpha^{1-1/m}$  y no hay infinitos arcos. También demostraremos que para  $r$  suficientemente pequeño dichas posibilidades ocurren efectivamente.

c) La constante  $K = K(r, C)$  está determinada por la ecuación de Euler. (Fórmula explícita en sección 27).

La relación (8.10) resulta de integrar  $h(x) = K_1$  y del lema 5.5, puesto que  $u'(a_1) = 0$  ( $m-1 > 0$  para todo  $r > 0$ ).

La demostración se va a basar en aplicar el lema 8.3 con  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $\beta = \bar{\beta}$  y  $u = \bar{u}$ . Supongamos que  $h$  no es estrictamente monótona, es decir, que  $h(s) = h(\bar{s})$  con  $0 < s, \bar{s} < a_1$ ,  $s \neq \bar{s}$ .

Se cumplirá  $\bar{s} \geq \sigma s$  o  $\bar{s} \leq \sigma s$ . Basta -evidentemente- estudiar una de las dos, por ejemplo  $\bar{s} \geq \sigma s$ . Por el lema 8.3

$$u(x) = \tau u(\sigma(x-s) + \bar{s}) \quad x \geq 0 \quad (8.11)$$

que es una "fórmula de autosemejanza" sin cambio de signo (las de la sección 9 son con cambio de signo). Esta fórmula lleva en seguida a contradicciones si se supone que  $u'(a_1) \neq 0$  (ver nota 9.1) o que  $u, u', u''$  ó  $u'''$  se anulan en  $[0, a_1]$ . Sin embargo, la demostración que sigue del lema en toda su generalidad es bastante más sutil.

Haciendo  $x = a_1$  en (8.11) resulta  $a_1 = \sigma(a_1 - s) + \bar{s}$ , luego la recta  $l(x) = \sigma(x-s) + \bar{s}$  corta a la recta diagonal principal en  $x = a_1$ . Ambas rectas no coinciden porque si coincidieran sería  $\sigma = 1, s = \bar{s}$ . Como además  $l(0) = \bar{s} - \sigma s \geq 0$ , resulta

$$x < l(x) < a_1 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < a_1 \quad (8.12)$$

(En particular es  $\sigma < 1$  y  $s < l(s) = \bar{s}$ ),

La fórmula (8.11) implica, usando (8.4), las siguientes fórmulas de autosemejanza para  $h$ :

$$h(x) = h(l(x)) \quad , \quad h'(x) = \sigma h'(l(x)) \quad (8.13)$$

$$\text{y haciendo } x = \bar{s} \quad \text{signo } h'(s) = \text{signo } h'(\bar{s}) \quad (8.14)$$

Para concluir la demostración vamos a ver que  $h' = 0$  en el intervalo  $(0, a_1)$ . Sea cualquier  $x_0$  de este intervalo. Sea  $x_1 = l(x_0)$ . Por (8.12) sabemos que  $x_0 < x_1 < a_1$ . Supongamos (reducción al absurdo) que  $h'(x_0) > 0$ . Por (8.13)  $h(x_0) = h(x_1)$  y  $h'(x_1) > 0$ . Como  $h'$  es continua, existe  $\bar{x}_0$  entre  $x_0$  y  $x_1$  tal que  $h(\bar{x}_0) = h(x_0)$  y  $h'(\bar{x}_0) < 0$ . Ahora bien, como  $h(\bar{x}_0) = h(x_0)$ ,  $x_0$  y  $\bar{x}_0$  se encuentran en la misma situación que  $s$  y  $\bar{s}$  y por (8.14) obtenemos  $h'(\bar{x}_0) > 0$ , contradicción.

De la misma forma se prueba que  $h'(x_0) < 0$  lleva a contradicción, luego  $h'(x_0) = 0$ . Q.E.D.

Corolario 8.1 El número  $\bar{s}$  del lema 8.2 está unívocamente determinado por  $(\alpha, \beta)$  y  $\bar{u}$ , salvo si  $\bar{u}$  tiene la forma (8.10), en cuyo caso  $u$  también tiene la forma (8.10).

Corolario 8.2 Para todo  $r > 0$  y todo  $(\alpha, \beta)$  el problema  $\alpha\beta r$  tiene a lo más dos soluciones distintas. En tal caso, una de las correspondientes funciones  $h$  es estrictamente decreciente y la otra estrictamente creciente.

Si  $h$  es constante en  $(0, a_1)$ , entonces el problema  $\alpha\beta$  tiene solución única en virtud del lema 8.2, aplicando con  $u = \bar{u}$  y con  $\bar{s}$  cualquier punto de  $(0, a_1)$ . Ahora el corolario resulta del lema 8.4.

Observemos que el lema 8.4, sin usar el lema 8.5, ya implica que hay a lo más dos soluciones.

### 9. Teoremas de semejanza y unicidad (problema $\alpha\beta r$ )

Recordamos que  $U$  designa, para  $r > 0$  dado, la solución del problema  $01r$  (es decir,  $\alpha=0, \beta=1$ ). Designaremos por  $A_1$  y  $A_\infty$  el primer cero positivo ( $A_1 \neq 0$ ) y el extremo del soporte de  $U$ , respectivamente, cuando convenga distinguirlos de los  $a_1$  y  $a_\infty$  de la solución de otro problema  $\alpha\beta r$ .

En la sección 26 veremos que  $U$  tiene infinitos arcos si  $r > (2/3) - \epsilon_0$ .

#### Teorema 9.1 (de unicidad)

I. Para todo  $r > 0$  y todo  $(\alpha, \beta)$ , el problema  $\alpha\beta r$  tiene a lo más dos soluciones.

II. La solución es única para todo  $r > 0$  si  $\beta \geq 0$  (recuérdese el convenio de signos de  $\alpha, \beta$ ). En particular,  $U$  es única para todo  $r > 0$ .

III. La solución es única para todo  $(\alpha, \beta)$  si  $r$  es tal que  $U$  tiene infinitos arcos.

El punto I es repetición del corolario 8.2.

Si  $\beta \geq 0$  la función  $h$  del lema 8.5 toma el valor cero en el punto  $b_0$  donde  $u'=0$  y valores negativos en un entorno a la derecha de  $b_0$ , luego es decreciente; por el corolario 8.2 no puede haber dos soluciones distintas. (Notemos que usando sólo el lema 8.4 también podemos demostrar rápidamente el punto II).

Si  $U$  tiene infinitos arcos,  $U'(A_1) \neq 0$  por el lema 5.5 y la función

$$\frac{U'(x)}{1 - \frac{1}{m}}$$

$U(x)$

tiende a  $+\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ , y a  $-\infty$  cuando  $x \rightarrow A_1^-$ . Apliquemos el lema 8.2 con  $\bar{u}=U$ : el número  $\bar{s}$  existe siempre que  $\alpha \neq 0$ . Si  $\alpha=0$  la unicidad ya la sabemos por el punto II.

Teorema 9.2 (\*) Representación de  $u(x;0,\beta)$  mediante  $U$

Para todo  $r > 0$  se verifica

$$\begin{aligned} u(x;0,\beta) &= \beta^{\frac{m}{m-1}} U\left(-\frac{1}{\beta^{\frac{1}{m-1}}} x\right) \\ M(0,\beta) &= \beta^{\frac{2m-3}{m-1}} M(0,1) \end{aligned}$$

Operando con la definición de  $m=4/(2-r)$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{4}{2+r}, \quad \frac{2m-3}{m-1} = \frac{2+3r}{2+r}$$

Este teorema resulta de aplicar el lema 8.1 con  $\alpha=0$  y calcular  $\sigma$ ,  $\tau$  y  $M(0,\beta)$  con las fórmulas (8.3), (8.4) y (8.6).

La unicidad fue establecida en el teorema anterior.

Se tienen resultados análogos para el problema  $\alpha\beta$  con  $\beta=0$ .

Teorema 9.3 Representación de  $u(x;\alpha,\beta)$  mediante  $U$

Sea cualquier  $r > 0$ . Para todo  $(\alpha,\beta)$  si  $U$  tiene infinitos arcos, o para  $(\alpha,\beta)$  tal que

$$\frac{\beta}{1-\frac{1}{m}} > \lim_{x \rightarrow A_1} \frac{U'(x)}{U(x)} \frac{1-\frac{1}{m}}{\alpha}$$

el problema  $\alpha\beta r$  tiene solución única y existen unas constantes  $s$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$  dependientes de  $(\alpha,\beta,r,C)$  tales que

$$\begin{aligned} u(x;\alpha,\beta) &= \tau U(\sigma x + s) \quad \text{para todo } x \geq 0 \\ \sigma &> 0, \quad 0 \leq s < A_1 \end{aligned}$$

Las anteriores relaciones determinan unívocamente  $s, \tau, \sigma$  e implican (8.4), (9.1) y (9.2). Obsérvese que  $\tau > 0$ , en virtud de los convenios de signo sobre  $\alpha, \beta$  de la pág. 9.

(\*) El teorema 9.2 se trata desde otro punto de vista en el teorema 17.4 (pág. 106). Por otra parte,  $\beta > 0$  en virtud del convenio de signos de la pág. 9.



El teorema 9.2 es el caso particular  $\alpha=0$ .

Si  $\alpha \neq 0$ , aplíquese el lema 8.2 como en la demostración del teorema 9.1. Elegimos  $s$  de modo que :

$$\frac{\beta}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{U'(s)}{U(s) \left(1 - \frac{1}{m}\right)} \quad (9.1)$$

Por último, el lema 8.5 (o el corolario 8.1) nos dan la unicidad de  $s$ . Después  $\tau$  y  $\sigma$  están determinados por

$$\alpha = \tau U(s) \quad , \quad \beta = \tau \sigma U'(s) \quad (9.2)$$

si  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ , o por (9.2) y (8.4) si  $\alpha=0$  o  $\beta=0$ .

Teorema 9.4 (de autosemejanza o de arcos semejantes)

Dado  $r > 0$ , si  $U'(A_1) \neq 0$  entonces  $U$  tiene infinitos arcos y se verifica :

$$-U(x+A_1) = \mu U(\lambda x) \quad \text{para todo } x \geq 0 \quad (9.3)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes positivas que dependen sólo de  $r$  (no dependen de  $\alpha, \beta, C$ ), están dadas por (9.6) y cumplen

$$\left. \begin{aligned} \mu \lambda^m &= 1 & , & & m &= \frac{4}{2-r} & , & \text{ si } r \neq 2 \\ \lambda &= 1 & & & & \text{ si } r = 2 \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Combinando este teorema y el anterior se obtiene la fórmula de autosemejanza para el problema  $\alpha\beta r$

$$u(x) = -\frac{1}{\mu} u\left(\frac{x-a_0}{\lambda} + a_1\right) \quad \text{para todo } x \geq 0 \quad (9.5)$$

donde  $a_0 = -s/\sigma \leq 0$ . En el caso particular de  $U$  es  $a_0 = 0$ .

En lenguaje geométrico, esta fórmula de autosemejanza significa que cada arco de  $u$  se obtiene del anterior mediante una semejanza que depende sólo de  $r$  (es independiente del arco y de  $\alpha, \beta, C$ ).

(La estructura de cada arco se estudia en la sección 17).

El número  $a_0$  es el "primer cero no-positivo" de  $u$  si prolongamos  $u$  hacia la izquierda mediante la fórmula de auto-semejanza. Esta prolongación coincide con la prolongación como solución de la ecuación de Euler, por el mismo razonamiento que en la demostración del lema 7.1.

Para demostrar el teorema, basta observar que  $-U(x+A_1)$  es solución del problema  $\alpha\beta$  con  $\alpha=0$ ,  $\beta=-U'(A_1)>0$  y aplicar el teorema 9.2. Por tanto :

$$\left. \begin{aligned} \mu &= |U'(A_1)|^{\frac{m}{m-1}}, & \frac{1}{\lambda} &= |U'(A_1)|^{\frac{1}{m-1}}, & \text{si } r \neq 2 \\ \mu &= |U'(A_1)|, & \lambda &= 1 & \text{si } r=2 \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Sólo falta demostrar la independencia respecto de  $C$ . Para ello hay que realizar un razonamiento de semejanza sobre la constante  $C$  análogo al del lema 8.1 (o al del teorema 9.2) que da :

$$U_C(x) = \frac{1}{\bar{C}} U_{C=1}(\bar{C}x), \quad U_C'(x) = U_{C=1}'(\bar{C}x) \quad (9.7)$$

donde  $\bar{C} = C^{\frac{1}{2+r}}$

Vemos que  $U_C'$  y  $U_{C=1}'$  son iguales en puntos "homólogos" por lo que (9.6) nos da la independencia respecto de  $C$ .

**Teorema 9.5** *(de alternativa entre infinitos arcos y "menos de dos arcos")*

Dado  $r>0$ , se verifica la siguiente alternativa :

Si  $U'(A_1) \neq 0$  (por tanto  $U'(A_1) < 0$ ), entonces  $u(x;\alpha,\beta)$  tiene infinitos arcos para todo  $(\alpha,\beta)$ .

Si  $U'(A_1)=0$ , entonces  $u(x;\alpha,\beta)$  tiene a lo más un cero aislado, es decir, "no llega a tener dos arcos completos".

Obsérvese que este caso también puede caracterizarse por  $U \geq 0$  en  $R^+$ , o por « $U$  tiene un sólo arco», o por  $A_1 = A_\infty$ .

Esta alternativa es independiente de la constante  $C$ .

En la segunda alternativa  $u(x; \alpha, \beta)$  puede presentar los dos casos siguientes (en la parte VI veremos que efectivamente ocurren) :

1.  $a_1 = a_\infty$ . Entonces  $u \geq 0$  en  $R^+$  y  $u$  tiene sólo un arco. Este arco es incompleto si  $\alpha > 0$  y completo si  $\alpha = 0$ .
2.  $a_2 = a_\infty$ . Entonces  $u$  tiene un primer arco positivo incompleto y un segundo arco negativo completo.

Este teorema es una consecuencia inmediata de los anteriores y del lema 5.5. En efecto, si  $U'(A_1) \neq 0$  entonces  $u(x; \alpha, \beta)$  tiene infinitos arcos por la fórmula de autosemejanza (9.5). Sea ahora  $U'(A_1) = 0$  y sea  $u$  solución del problema  $\alpha\beta$ . Si  $u'(a_1) = 0$  no hay nada que probar. Si  $u'(a_1) \neq 0$ , entonces  $-u(x+a_1)$  admite la representación del teorema 9.2, con lo que el segundo arco de  $u(x)$  es semejante al arco de  $U$ .

Los teoremas fundamentales de esta sección pueden demostrarse mucho más fácilmente en algunos casos importantes que detallamos en las siguientes notas.

#### Nota 9.1 Simplificación cuando $r \geq 1$ (caso convexo)

La simplificación es drástica. Por una parte, sabemos de antemano la unicidad (lema 6.4). Por otra parte,  $u'''$  es continua incluso en  $a_\infty$  (corolario 6.1), luego por el teorema 12.1  $u$  tiene infinitos arcos y en particular  $U'(A_1) \neq 0$ . Entonces los razonamientos de los lemas 8.1 y 8.2 (a su vez simplificados por la unicidad) nos dan directamente los teoremas 9.2, 9.3 y 9.4, salvo la unicidad del número  $s$ , que se obtiene como sigue. Si en la relación

$$u(x) = \tau U(\sigma x + s) = \bar{\tau} U(\bar{\sigma} x + \bar{s})$$

consideramos los ceros  $A_1$  y  $A_2$  de  $U$ , resulta que las rectas  $\sigma x + s$  y  $\bar{\sigma} x + \bar{s}$  tienen dos puntos comunes, luego  $\sigma = \bar{\sigma}$ ,  $s = \bar{s}$ . (Esto es también una demostración del lema 8.5).

Además podemos hacer los razonamientos de los lemas 8.1 y 8.2 sobre la ecuación diferencial de Euler en vez del funcional  $J$ , pues es bien conocido que los problemas convexos y diferenciables (caso  $r > 1$ ) pueden caracterizarse mediante la ecuación de Euler. En el caso  $r=1$  esto último también es cierto (ver referencias en la sección 6-C).

Nota 9.2 Simplificación cuando  $U$  tiene infinitos arcos

Estamos en la siguiente situación :  $0 < r < 1$ , no sabemos todavía la unicidad y suponemos que una de las soluciones del problema ( $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ ) verifica  $U'(A_1) \neq 0$ . El camino deductivo que seguimos es : teorema 7.1, lema 7.1, lema 8.1. Al llegar al lema 8.2, tomamos  $u=\bar{u}=U$ ,  $\bar{s}=A_1$  y resulta ya que  $U$  es única, con lo que alcanzamos la situación de la nota anterior.

Desde luego, la complicación mayor está originada en la necesidad de demostrar la unicidad al mismo tiempo que se hacen los razonamientos de semejanza. Otro camino es demostrar previamente la unicidad por el método de la sección 23-A, que usa también, en esencia, el lema 7.1 y tanto la ecuación de Euler del teorema 7.1.

Nota 9.3 Simplificación cuando  $r \geq 2/3$

Consiste en demostrar previamente que  $U$  tiene infinitos arcos por el método de la sección 15 o el de la sección 26. Despues estamos en la nota anterior.

Veremos que para  $2/3 < r < 1$  también es  $u'''$  continua en  $a_\infty$ , pero no disponemos de una demostración directa como la del corolario 6.1. Por el contrario, las demostraciones que conocemos nos obligan a descartar primero la eventualidad de un número finito de arcos, que es -en nuestra opinión- una de las mayores dificultades resueltas en este trabajo.

### 10. Compacidad del soporte y fórmula de autosemejanza

Vamos a interpretar más detalladamente la fórmula de autosemejanza (9.5). Dado  $x_n$ ,  $a_n \leq x_n < a_{n+1}$ , llamamos  $x_{n+1}$  a su homólogo del arco siguiente, es decir

$$x_{n+1} = \frac{x_n - a_0}{\lambda} + a_1$$

En particular, si  $x_n = a_n$ , entonces  $x_{n+1} = a_{n+1}$ . Por el teorema 5.2 se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a_\infty \quad (10.1)$$

cualquiera que sea el punto inicial de la sucesión  $\{x_n\}$ .

$1/\lambda$  es la razón de semejanza "en el eje de abscisas", en el sentido de que

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \quad (10.2)$$

$\mu = (1/\lambda)^m$  es la razón de semejanza de los valores de  $|u|$ , puesto que

$$u(x_{n+1}) = -\mu u(x_n) = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^m u(x_n) \quad (10.3)$$

Derivando (9.5) resulta

$$u^{(j)}(x_{n+1}) = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{m-j} u^{(j)}(x_n) \quad (10.4)$$

En estas relaciones, así como en el corolario 10.2 y en las pp. 66, 68, 152 queda patente la conveniencia de usar el parámetro  $m$ . Obsérvese que  $m < 0$  si  $r > 2$ . Los signos de  $m-2$ ,  $m-3$  y  $m-4$  se ponen de manifiesto en las identidades:

$$m-2 = \frac{2r}{2-r}, \quad m-3 = \frac{3r-2}{2-r}, \quad m-4 = m(r-1) \quad (10.5)$$

Adelantando ideas, el cambio de signo de  $m-3$  está estrechamente ligado a la importancia del valor  $r=2/3$  y a la no acotación de  $u'''$  para  $r < 2/3$ . La positividad de  $m-2$  va unida a la continuidad de  $u''$  para todo  $r > 0$ . La identidad  $m-4=m(r-1)$  puede visualizarse como una especie de ley de exponentes para la ecuación de Euler.

Teorema 10.1 Sean  $\lambda, \mu$  las razones de semejanza del teorema 9.4. Entonces :

$\mu < 1$  para todo  $r > 0$

$$\frac{1}{\lambda} \begin{cases} < 1 & \text{si } 0 < r < 2 \\ = 1 & \text{si } r = 2 \\ > 1 & \text{si } r > 2 \end{cases}$$

Si  $a_\infty$  es finito,  $\mu < 1$  por (10.3) y la continuidad de  $u$ . Si  $a_\infty = \infty$ , resulta  $\mu < 1$  porque  $u(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  (teorema 5.1). (También dan  $\mu < 1$  la fórmula de autosemejanza junto con  $u \in L^r$  o  $u'' \in L^2$ ). Ahora las desigualdades para  $\lambda$  se obtienen de (9.4), teniendo en cuenta el signo de  $m$ .

Teorema 10.2 Sea  $u$  una solución del problema  $\alpha\beta r$ . Entonces el soporte de  $u$  es un intervalo compacto si  $0 < r < 2$  ; y es  $\bar{R}^+$  si  $r \geq 2$ .

Por el teorema 5.2 el soporte es un intervalo.

Si  $r \geq 2$  ya sabemos que el soporte es  $\bar{R}^+$  (ver nota de la sección 6-B).

Sea  $0 < r < 2$ . Si  $U$  tiene un solo arco, la alternativa del teorema 9.5 nos da que  $u$  es de soporte compacto. Si  $U$  tiene infinitos arcos,  $u$  también tiene infinitos arcos y el soporte es compacto por (10.1), (10.2) y ser  $1/\lambda < 1$ .

Algunos cálculos más con las fórmulas (10.2), (10.3) y (10.4) nos dan los siguientes corolarios :

Corolario 10.1 Si  $0 < r < 2$  y  $U$  tiene infinitos arcos, entonces

$$A_\infty = \frac{A_1}{1 - (1/\lambda)}$$

$$a_\infty = a_0 + \frac{a_1 - a_0}{1 - (1/\lambda)} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{1 - (1/\lambda)}$$

con  $a_0$  como en (9.5).

El problema de acotar el soporte de  $U$  queda, pues, reducido a acotar  $A_1$  y  $1/\lambda$ . En la sección 19 se acota  $A_1$  (y al mismo tiempo  $A_\infty$ ) en un contexto más general. En la sección 23-B se dan cotas de  $1/\lambda$ .

#### Corolario 10.2

I. Si  $0 < r < 2$  y  $U$  tiene infinitos arcos, los puntos homólogos de los arcos de  $u(x; \alpha, \beta)$  están sobre una curva de la forma

$$Cte (a_\infty - x)^m$$

Para las derivadas  $u'$ ,  $u''$  y  $u'''$  las correspondientes curvas tienen exponentes  $m-1$ ,  $m-2$  y  $m-3$  respectivamente.

II. Si  $r > 2$ , mismo resultado poniendo  $\bar{a} + x$  en vez de  $a_\infty - x$ , donde  $\bar{a} > 0$  esta dada por (10.6) (Recuérdese que  $m < 0$  si  $r > 2$ ).

III. Si  $r=2$ , las referidas curvas son exponenciales decrecientes.

Comentamos de dónde procede la constante  $\bar{a}$  del punto II. Para  $r > 2$ , al ser  $1/\lambda > 1$ , la recta  $a_1 + (x - a_0)/\lambda$  tiene su punto fijo para  $x$  negativo; precisamente ese punto fijo ocurre para  $x = -\bar{a}$  y de ahí la fórmula:

$$\bar{a} = -a_1 + \frac{a_1 - a_0}{1 - \lambda} \quad (10.6)$$

Cuando  $r > 2$ , al prolongar  $u$  hacia la izquierda mediante la fórmula de autosemejanza (o como solución de la ecuación de Euler), los arcos de  $u$  van disminuyendo su base y aumentando su altura según nos aproximamos al punto  $-\bar{a}$ . En este punto hay una "explosión" (blow up) oscilante.

Para completar esta descripción, notemos que si  $r < 2$  el punto fijo de dicha recta está en  $x = a_\infty$ ; y si  $r=2$  no tiene punto fijo.

Nota Si sólo se desea demostrar la compacidad del soporte, se puede seguir el siguiente camino abreviado. Si todas las soluciones del problema  $(\alpha=0, \beta=1)$  verifican  $U'(A_1)=0$ , entonces la compacidad del soporte de  $u$  resulta de un razonamiento muy parecido al del teorema 9.5 ; este razonamiento se basa sólo en el lema 8.1. Si una de las soluciones del problema  $(\alpha=0, \beta=1)$  verifica  $U'(A_1) \neq 0$ , estamos en la situación de la nota 9.2.

La demostración de la compacidad del soporte (por el método de semejanza) para  $1 \leq r < 2$  puede simplificarse aún mucho más, de acuerdo con la nota 9.1.



### 11. Regularidad en el problema $r$ -potencial

La fórmula de autosemejanza (complementada con otros resultados cuando  $r < 2/3$ ) nos permite estudiar exhaustivamente la integrabilidad  $L^q$  de  $u$  y sus derivadas, lo que nos da propiedades de regularidad en  $a_\infty$  cuando el soporte es compacto, y de comportamiento asintótico cuando el soporte es no-compacto. Notemos que el corolario 10.2 contiene otra versión de este tipo de propiedades.

**Lema 11.1** Sean  $r > 0$ ,  $q > 0$ ,  $u$  solución del problema  $\alpha\beta r$  con infinitos arcos. Entonces los números

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} |u^{(j)}|^q \quad j=0, 1, 2, 3$$

forman una progresión geométrica de razón

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1+(m-j)q}$$

El resultado es válido para derivadas de órdenes superiores siempre y cuando dichos números estén bien definidos.

Notemos que en virtud de la ecuación de Euler (teorema 7.1)  $u'''$  es continua en el interior del soporte, de modo que los números del lema están bien definidos.

La demostración consiste en un cálculo elemental con la fórmula (9.5).

#### Teorema 11.1 Regularidad $L^q$ global

Si  $u$  es solución del problema  $\alpha\beta r$

- I. Para todo  $r > 0$ ,  $u''' \in L^1(R^+)$  y por tanto  $u'' \in \text{Abs } C(\bar{R}^+)$ .
- II.  $u''' \in L^\infty(R^+)$  si y sólo si  $r \geq 2/3$ .
- III.  $u^{iv} \in L^1(R^+)$  si y sólo si  $r > 2/3$ . Entonces  $u''' \in \text{Abs } C(\bar{R}^+)$ .
- IV.  $u^{iv} \in L^\infty(R^+)$  si y sólo si  $r \geq 1$ .
- V.  $u^v \in L^1(R^+)$  si y sólo si  $r > 1$ . Entonces  $u^{iv} \in \text{Abs } C(\bar{R}^+)$ .

Es de notar que para  $r \leq 2/3$  la distribución sobre  $R^+$   $u^{iv}$  no es una función (ni una medida), por no ser integrable en  $a_\infty$ .

La ecuación de Euler nos da la validez de estos resultados en cada compacto de  $[0, a_\infty)$ . Si  $u$  tiene infinitos arcos, usamos el lema 11.1 y el corolario 10.2. Veamos, por ejemplo, el punto I. Por el lema 11.1,  $u'''$  es integrable en  $(0, a_\infty)$ . Por el corolario 10.1,  $u''$  es continua y nula en  $a_\infty$  (recordar que  $m-2 > 0$  para todo  $r > 0$ ), luego  $u''$  es absolutamente continua en  $\bar{R}^+$  y la distribución  $u'''$  sobre  $R^+$  es una función integrable. En los otros puntos el razonamiento es análogo. Ver los signos de  $m-3$  y  $m-4$  en (10.5).

Si  $u$  tiene un número finito de arcos, postponemos la demostración a la parte VI. Concretamente, en la sección 26 veremos que  $u$  sólo puede tener un número finito de arcos si  $r < 2/3$ , y entonces el teorema 11.1 es consecuencia inmediata del teorema 27.1 (p.152). Lo mismo es válido para el siguiente corolario.

Es claro que el lema 11.1 nos permite precisar exactamente a que espacios  $L^q(R^+)$  pertenecen  $u$  y sus derivadas. Sólo damos los resultados que nos parecen de más interés:

Corolario 11.1 Sea  $q > 0$ .

- I. Para  $0 < r < 2/3$ ,  $u''' \in L^q(R^+)$  si y sólo si  $q < \frac{1}{3-m} = \frac{2-r}{2-3r}$
- II. Para  $2/3 < r < 1$ ,  $u^{iv} \in L^q(R^+)$  si y sólo si  $q < \frac{1}{4-m} = \frac{2-r}{4(1-r)}$

Corolario 11.2 Sea  $r > 0$ .

- I.  $u \in L^1(R^+)$  si y sólo si  $r < 6$ .
- II.  $u \in L^2(R^+)$  si y sólo si  $r < 10$ .
- III.  $u', u'' \in L^1(R^+)$  para todo  $r > 0$ .

Recordamos que, puesto que  $u, u', u'' \in L^\infty(R^+)$  (son continuas y nulas en  $\infty$ ), su pertenencia a  $L^q(R^+)$  implica su pertenencia a  $L^t(R^+)$  para todo  $t \geq q$  (ver nota de la sección 5-B, p.33).

Teorema 11.2 Regularidad hölderiana global

Si  $u$  es solución del problema  $\alpha\beta r$  :

- I.  $u \in C^{2, m-2}(\bar{R}^+)$  cuando  $0 < r < 2/3$
- II.  $u \in C^{2, 1}(\bar{R}^+)$  cuando  $r = 2/3$
- III.  $u \in C^{3, m-3}(\bar{R}^+)$  cuando  $2/3 < r < 1$
- IV.  $u \in C^{3, 1}(\bar{R}^+)$  cuando  $r = 1$

Además, esta es la regularidad hölderiana mejor posible globalmente en  $R^+$ .

Suponemos infinitos arcos. (Si  $u$  tiene un número finito de arcos, nos remitimos a la demostración del teorema 11.1).

La regularidad es la mejor posible por el corolario 10.2.

Los puntos II y IV son repetición de lo dicho en el teorema 11.1.

El corolario 11.1 junto con el lema 5.1 "casi" implica los puntos I y III. En efecto,  $q < 1/(3-m)$  implica  $1/q' < m-2$ , pero no llegamos así al índice de Hölder  $m-2$ . Por ello, hemos de dar una demostración distinta. Damos sólo la del punto III, pues la del punto I es análoga.

Sean  $0 \leq x, y < a_\infty$ . Podemos suponer  $x, y$  en el mismo arco (el  $n$ -ésimo), pues sino podríamos cambiar uno de los puntos por su homólogo del arco más lejano, ya que para  $r > 2/3$  los valores de  $u'''$  en puntos homólogos van decreciendo (corolario 10.2). Sean  $\bar{x}, \bar{y}$  los puntos homólogos de  $x, y$  en el primer arco. Por (10.4) :

$$|u'''(x) - u'''(y)| = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n(m-3)} |u'''(\bar{x}) - u'''(\bar{y})|$$

Además por (10.2)  $|x-y| = (1/\lambda)^n |\bar{x}-\bar{y}|$  con lo que

$$\frac{|u'''(x) - u'''(y)|}{|x-y|^{m-3}} = \frac{|u'''(\bar{x}) - u'''(\bar{y})|}{|\bar{x}-\bar{y}|^{m-3}}$$

Por lo tanto, basta ver que  $u'''$  es hólde-  
 riana de índice  $m-3$  en el primer arco. (Se observa además que la constante  
 de Hölder del primer arco es válida para  $\bar{R}^+$ ). Ahora bien,  
 en un cero  $a$  de  $u$ ,  $u^{(r)}$  es equivalente a  $Cte (a-x)^{r-1}$   
 (ecuación de Euler), luego en el primer arco  $u'''$  es hólde-  
 riana de índice  $r$ , y  $r > m-3$  si  $r < 1$ . Q.E.D.

Nota La regularidad hólde-  
 riana del teorema 11.2 es aná-  
 loga a la obtenida por Phillips [1] para el correspondiente  
 problema de segundo orden en dimensión  $N$ . En nuestro problema  
 de cuarto orden hay que dividir el intervalo  $0 < r < 1$  en  $0 < r < 2/3$   
 y  $2/3 < r < 1$ , cosa que no ocurre en el problema de segundo orden.



## PARTE IV

## EL PROBLEMA I : LEMAS BASICOS

En esta parte se extraen consecuencias de las tres hipótesis básicas (1.1), (1.2) y (1.3), tomadas aisladamente o no, lo que ayudará a realizar la exposición de la parte V.

(Estas hipótesis se enuncian en la pág. 12).



12.  $u^{iv}$  es una medida donde  $u \neq 0$   
si  $\Gamma$  es "semi-monótona"

Lema 12.1 Sea  $S$  un intervalo abierto en el que  $u \neq 0$ .

Si  $\Gamma$  verifica la hipótesis de semi-monotonía (1.2), entonces  $u^{iv}$  es una medida de Radon sobre  $S$ , no-positiva si  $u > 0$  y no-negativa si  $u < 0$ .

#### Notas

a) Por tanto  $u''$  es continua en  $S$ , cóncava si  $u > 0$ , convexa si  $u < 0$  (lema 1.1).

b) Al igual que en la sección 6-A, el lema puede refinarse: "si  $\Gamma$  es no-decreciente en un intervalo abierto  $\Lambda$ , entonces  $u^{iv}$  es una medida no-positiva en  $\Omega = u^{-1}(\Lambda)$ ".

c) Generalización a dimensión  $N$ . Si  $N < 4$ ,  $u$  es continua (ver p.ej. Schwarz [1]) y el lema es válido, con la misma demostración, poniendo que  $S$  es un abierto conexo. Si  $N \geq 4$ , el lema aún conserva su validez si  $S$  es el abierto donde  $u > 0$  (o bien  $u < 0$ ), entendiendo que  $u > 0$  en un punto  $x_0$  si existe  $\eta > 0$  y un entorno de  $x_0$  en el que  $u \geq \eta$  c.t.p.

d) La generalización a ordenes superiores (en una dimensión) es inmediata. Nos referimos a poner  $u^{(n)}$  en vez de  $u''$  en el funcional. Hay que tener en cuenta que el signo depende de la paridad de  $n$ , porque  $\langle u^{(2n)}, \phi \rangle = (-1)^n \int u^{(n)} \phi^{(n)}$ . Por ello  $(-1)^n \langle u^{(2n)}, \phi \rangle \leq 0$ .

Demostremos el lema. Basta considerar  $u > 0$  en  $S$ . Sea  $\phi \in C_0^\infty(S)$ ,  $\phi \leq 0$ ,  $\lambda > 0$ . Por (6.2)

$$\int_S \Gamma(u) - \Gamma(u + \lambda \phi) \leq \frac{1}{2} \int_S (u'' + \lambda \phi'')^2 - u''^2$$

Como  $u \geq \epsilon > 0$  en el soporte de  $\phi$ , tenemos que  $u + \lambda \phi > 0$  en  $S$  para  $\lambda$  suficientemente pequeño. Por los signos escogidos  $u + \lambda \phi \leq u$  y por ser  $\Gamma(t)$  no-decreciente para  $t > 0$ , resulta  $\Gamma(u + \lambda \phi) \leq \Gamma(u)$  en  $S$ . Luego

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_S (u'' + \lambda \phi'')^2 - u''^2$$



para todo  $\lambda > 0$  en un entorno de cero. Dividiendo por  $\lambda$  y haciendo  $\lambda \rightarrow 0^+$ , resulta

$$\langle u^{iv}, \phi \rangle = \int_S u'' \phi'' \geq 0$$

donde se ha usado la definición de derivada distribucional. Por tanto, la distribución  $u^{iv}$  es no-positiva sobre  $S$ , luego (Schwarz [1]) es una medida.

**Lema 12.2** Sea  $f$  tal que  $f^{iv}$  es una medida de Radon en el intervalo abierto  $(c_1, c)$ ,  $c_1 < c$ . Suponemos que 1º)  $f \geq 0$  pero  $f \neq 0$  y  $f^{iv} \leq 0$  en  $(c_1, c)$ . 2º)  $f(c^-) = f'(c^-) = 0$ . Entonces  $c \neq \infty$  y

I.  $f''(c^-) \geq 0$  y finito. Por tanto  $f''' \in L^1(c_1, c)$ .

II. Si además  $f''(c^-) = 0$ , entonces  $-\infty \leq f'''(c^-) < 0$ .

Por ser  $f^{iv} \leq 0$ ,  $f'''$  es una función no-creciente,  $f''$  es cóncava (lema 1.1) y los límites del lema existen. Demostremos I y II sin presuponer si  $c$  es finito o no. Si fuera  $f''(c^-) < 0$ , sería  $f' > 0$  en un entorno y  $f < 0$ : contradicción. Por ser  $f''$  cóncava,  $f''(c^-) \neq +\infty$ . Pasamos al punto II. Si fuera  $f'''(c^-) \geq 0$ , sería en un entorno  $f''' \geq 0$ ,  $f'' \leq 0$ ,  $f' \geq 0$  y  $f \leq 0$ , por tanto  $f \equiv 0$ , contradicción.

Veamos que  $c \neq \infty$ . Supongamos  $c = \infty$ . Si  $f''(c^-) > 0$ , entonces  $f'' \geq \text{cte} > 0$  en un entorno de  $\infty$  y  $f'(c^-) = +\infty$ : contradicción. Si  $f''(c^-) = 0$ , por el punto II  $f'''(c^-) \leq \text{cte} < 0$  en un entorno de  $\infty$  y  $f''(c^-) = -\infty$ : contradicción.

**Lema 12.3** Si  $\Gamma$  es definida positiva (1.1) y semi-monótona (1.2), entonces  $u$  tiene ceros arbitrariamente grandes.

Por el teorema 5.1 los límites  $u(\infty)$  y  $u'(\infty)$  son nulos.

Supongamos (reducción al absurdo) que  $u > 0$  en  $(c_1, \infty)$ . Por el lema 12.1 se cumplen las hipótesis del lema 12.2 con  $c = \infty$ : contradicción. Del mismo modo se excluye  $u < 0$ .

Teorema 12.1 Sea  $\Gamma$  definida positiva (1.1) y semi-monótona (1.2). Entonces :

O bien  $u$  tiene en  $(0, a_\infty)$  una sucesión infinita numerable de arcos contiguos de signo alternante (abreviadamente " $u$  tiene infinitos arcos").

O bien  $u$  tiene un número finito de arcos, en cuyo caso el soporte de  $u$  es compacto y  $u'''$  no es continua en  $a_\infty$ .

Es consecuencia de los lemas anteriores y del teorema 5.2. El lema 12.3 asegura que existe un primer cero positivo  $a_1$  de  $u$ . Si  $u'(a_1) \neq 0$  existe  $a_2$ , etc. O bien  $u'(a_n) \neq 0$  para todo  $n$  (infinitos arcos), o bien  $u'(a_n) = 0$  para algún  $n$ . En el segundo caso  $a_n = a_\infty$ , y  $u$  (o bien  $-u$ ) verifica en el último arco las hipótesis del lema 12.2, de modo que si  $u''$  es continua en  $a_\infty$  entonces  $u'''(a_\infty) \neq 0$ .

Nota Si en el teorema 12.1 además  $\Gamma(s)$  es Lip en un entorno de  $s=0$ , entonces  $u$  tiene infinitos arcos. Puesto que por el lema 6.1 (ver también el corolario 6.1),  $u'''$  es continua en  $a_\infty$ . En el lema 15.4 veremos una condición suficiente más general para que  $u$  tenga infinitos arcos.

13. Ecuación de Euler donde  $u' \neq 0$   
si  $\Gamma$  es abs. continua

Vamos a llamar

$$f(\lambda) = \int_c^d \Gamma(u(x) + \lambda\phi(x)) \, dx, \quad g(\lambda) = \int_c^d \Gamma'(u(x) + \lambda\phi(x)) \phi(x) \, dx \quad (13.1)$$

El método usual del cálculo de variaciones nos permitirá obtener la ecuación de Euler en  $(c, d)$  en cuanto tengamos un lema de derivación de integrales paramétricas que asegure que  $f'(\lambda) = g(\lambda)$  para  $\lambda = 0$ .

Lema 13.1 Si  $u, \phi$  son  $C^1$  en el intervalo compacto  $[c, d]$ ,  $u' \neq 0$  en  $[c, d]$  y  $\Gamma \in \text{Abs } C_{loc}^1(R)$ , entonces para todo  $\lambda$  en un entorno de cero  $g(\lambda)$  es continua y  $f'(\lambda) = g(\lambda)$ .

(En este lema  $\Gamma$  y  $u$  no se refieren al problema  $\alpha\beta\Gamma$ , es decir,  $\Gamma$  y  $u$  sólo verifican las hipótesis enunciadas en el lema).

La demostración se compone de tres pasos : 1.  $g(\lambda)$  está bien definida, es decir, para cada  $\lambda$   $\Gamma'(u(x) + \lambda\phi(x))$  está definida c.t.p. en  $x$  y pertenece a  $L^1(c, d)$ . 2.  $g(\lambda)$  es continua. 3.  $\int g(\lambda) d\lambda = f(\lambda) + \text{Cte}$ . En los tres pasos  $\lambda$  es cualquiera en un entorno de cero.

1. Podemos suponer  $u' > 0$ . Por el teorema del extremo absoluto,

$$u'(x) + \lambda\phi'(x) \geq \text{Cte} > 0 \quad (13.2)$$

para todo  $x \in [c, d]$  y todo  $\lambda$  de un entorno de cero. Para cada  $\lambda$  de ese entorno,  $u + \lambda\phi$  es creciente, luego  $\Gamma(u(x) + \lambda\phi(x))$  es abs. continua en  $[c, d]$ , su derivada pertenece a  $L^1(c, d)$  y está dada en c.t.p. por

$$\Gamma'(u(x) + \lambda\phi(x)) (u'(x) + \lambda\phi'(x))$$

en virtud del teorema de cambio de variable en integrales de Lebesgue. (Ver p.ej. G. de Barra [1], teor. 15 del cap. 9, o Sz. Nagy [1], sección 5.2.5. También citamos Hardy-Littlewood-

Pólya [1], pág. 130, por el interés y claridad de sus breves comentarios). Finalmente, por (13.2) resulta que  $\Gamma'(u+\lambda\phi)$  también pertenece a  $L^1(c,d)$ .

2. Hasta aquí hemos visto que  $g(\lambda)$  está bien definida. Pasamos a ver que  $g(\lambda)$  es continua, lo que constituye la parte más importante en la demostración de este tipo de lemas.

Llamemos  $s=H(x,\lambda)=u(x)+\lambda\phi(x)$  y  $H^{-1}(\cdot,\lambda)$  a la función inversa de  $H$  para  $\lambda$  dado, de modo que  $x=H^{-1}(s,\lambda)$ . El teorema de la función inversa aplicado a  $(x,\lambda) \rightarrow (s,\lambda)$  nos da que  $H^{-1}$  es  $C^1$  en  $(s,\lambda)$  porque  $H$  lo es. (Sólo usaremos la continuidad de  $H^{-1}$ ).

Por otra parte, podemos escribir trivialmente

$$g(\lambda) = \int_c^d \Gamma'(u(x)+\lambda\phi(x)) (u'(x)+\lambda\phi'(x)) z(x,\lambda) dx$$

donde se ha puesto  $z(x,\lambda) = \frac{\phi(x)}{u'(x)+\lambda\phi'(x)}$

Por (13.2)  $z(x,\lambda)$  es continua en  $(x,\lambda)$ .

Por el teorema antes citado, podemos hacer el cambio de variable  $s = u(x)+\lambda\phi(x) = H(x,\lambda)$ . Resulta :

$$g(\lambda) = \int_{u(c)+\lambda\phi(c)}^{u(d)+\lambda\phi(d)} \Gamma'(s) z(H^{-1}(s,\lambda),\lambda) ds$$

Ahora ya  $g(\lambda)$  es continua por un teorema standard de continuidad de integrales paramétricas de Lebesgue. En efecto, dado que  $z(H^{-1}(s,\lambda),\lambda)$  es continua en  $(s,\lambda)$  tenemos : 1º) El integrando es separadamente continuo en  $\lambda$  para casi todo  $s$ . 2º) El integrando está acotado en valor absoluto por Cte  $|\Gamma'(s)|$ , es decir, acotado por una función integrable independiente de  $\lambda$ . 3º) Los límites de integración son funciones continuas de  $\lambda$ .

3. El tercer paso resulta de aplicar el teorema de Fubini y cambiar el orden de integración. La función

$$\int_c^d \left| \Gamma'(u(x) - \lambda \phi(x)) \phi(x) \right| dx$$

es continua en  $\lambda$  por lo mismo que  $g(\lambda)$ . Por tanto

$$\int_0^\lambda d\lambda \left[ \int_c^d \left| \Gamma'(u(x) + \lambda \phi(x)) \phi(x) \right| dx \right] < \infty$$

así que por el teorema de Fubini podemos hacer el siguiente cambio de orden de integración:

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda g(\lambda) d\lambda &= \int_c^d dx \left[ \int_0^\lambda \Gamma'(u(x) + \lambda \phi(x)) \phi(x) d\lambda \right] = \\ &= \int_c^d \Gamma(u(x) + \lambda \phi(x)) dx - \int_c^d \Gamma(u(x)) dx = f(\lambda) + \text{cte.} \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad se usa de nuevo el teorema de cambio de variable: para cada  $x$  en que el integrando está definido (por tanto c.t.p. en  $x$ ) hacemos el cambio lineal  $\lambda \rightarrow s = u(x) + \lambda \phi(x)$ .

Lema 13.2 Ecuación de Euler donde  $u' \neq 0$

Si en el problema  $\alpha\beta\Gamma$  es  $\Gamma \in \text{Abs } C_{loc}^1(R)$ , entonces  $\Gamma'(u(x))$  está definida c.t.p. en  $\Omega$  y

$$u^{iv} = - \Gamma'(u) \quad \text{en} \quad L_{loc}^1(\Omega)$$

siendo  $\Omega$  el abierto de  $R^+$  definido por  $u' \neq 0$ .

En particular,  $u''' \in \text{Abs } C_{loc}(\Omega)$ .

(La afirmación sobre  $u'''$  no es más que el lema 1.1, punto I). Obsérvese que sólo hacemos la hipótesis de continuidad absoluta.

Basta demostrarlo en un entorno  $S$  de cada punto de  $\Omega$ . Podemos tomar  $S$  un intervalo abierto con  $\bar{S} \subset \Omega$ . En la demostración del lema anterior vimos que  $\Gamma'(u(x)) \in L^1(\bar{S})$ . Sea  $\phi \in C_0^\infty(S)$ . Por el método usual en cálculo de variaciones

$$0 = \left. \frac{dJ(u+\lambda\phi)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \int_S u''\phi'' + \int_S \Gamma'(u)\phi$$

donde la derivación de la segunda integral proviene de hacer  $\lambda=0$  en el lema anterior.

Por definición de derivada distribucional:

$\langle u^{iv} + \Gamma'(u), \phi \rangle = 0$ , que nos da la ecuación de Euler en  $S$ .

Nota Generalización a órdenes superiores (dimensión uno).

Si en el funcional del problema  $\Gamma$  ponemos  $u^{(n)}$  en vez de  $u''$ , resulta

$$(-1)^n u^{(2n)}(x) = -\Gamma'(u(x)) \quad \text{en} \quad L^1_{loc}(\{u' \neq 0\})$$

Recuérdese que  $\langle u^{(2n)}, \phi \rangle = (-1)^n \int u^{(n)} \phi^{(n)}$ .

#### 14. Estudio de los puntos en que $u'=0$

##### 14-A Consideraciones heurísticas

Sea  $b$  un punto en que  $u'$  se anula. Vamos a encontrarnos con los siguientes casos, en todos los cuales  $u''$  será continua en  $b$ :

1.  $b < a_\infty$ . Tendremos que  $u''(b) \neq 0$ . Estudio detallado en la sección 14-B. En este apartado da igual que sea  $b=0$  o  $b>0$ , pero más adelante necesitaremos distinguir estos dos sub-casos.
2.  $b = a_\infty$  cuando hay un número finito de arcos. Tendremos que  $u''(a_\infty) = 0$ ,  $|u'''(a_\infty)| > 0$  y  $u' \neq 0$  en un entorno a la izquierda de  $a_\infty$ . Sección 15.
3.  $b = a_\infty$  cuando hay infinitos arcos. Secciones 16 y 18.
4.  $b > a_\infty$ . Caso trivial.

Consideremos el caso 1. Tomemos  $b=0$ ,  $u(0)=\alpha$ . Suponemos  $\Gamma'$  absolutamente continua. El problema es que aunque  $\Gamma'(u(x))$   $u'(x) \in L^1(0, \epsilon)$  en virtud del teorema de cambio de variable en integrales de Lebesgue (ver citas en la sección anterior), en cambio  $\Gamma'(u(x))$  puede no ser integrable en  $(0, \epsilon)$ . Veamos el siguiente ejemplo:

$$\Gamma(s) = |s-\alpha|^r \operatorname{sgn}(s-\alpha) \quad , \quad \Gamma'(s) = \frac{1}{|s-\alpha|^{1-r}} \quad , \quad 0 < r < 1$$

en un entorno de  $s=\alpha$ . Como  $u'(0)=0$  y  $u''$  es continua y no nula en  $x=0$ , se tiene cuando  $x \rightarrow 0^+$

$$u(x) - \alpha \sim \text{Cte } x^2 \quad \Gamma'(u(x)) \sim \frac{\text{Cte}}{x^{2(1-r)}}$$

luego  $\Gamma'(u(x))$  será integrable en un entorno de cero si  $r > 1/2$ , y no integrable si  $r \leq 1/2$ .

Estas consideraciones heurísticas admiten una formulación rigurosa y general introduciendo la hipótesis  $\Gamma' \in L^q$ . Entonces el número  $r$  del ejemplo anterior es el exponente de Hölder (lema 5.1) correspondiente a  $q$ , es decir,

$r=1/q'$ . Así

$$r > \frac{1}{2} \quad \text{corresponde a} \quad q > 2$$

En el caso 2 ( $b=a_\infty$  y número finito de arcos) pueden hacerse consideraciones análogas en un entorno a la izquierda E de  $a_\infty$  (ahora es  $\alpha=0$ ). Así resulta que en E

$$|u(x)| \geq \text{Cte } (a_\infty - x)^3 \quad |\Gamma'(u(x))| \leq \frac{\text{Cte}}{(a_\infty - x)^{3(1-r)}}$$

y por tanto  $\Gamma'(u(x)) \in L^1(E)$  si

$$r > \frac{2}{3} \quad \text{que corresponde a} \quad q > 3$$

La diferencia entre el caso 1 y el caso 2 estriba en que el primero (cuando  $b \neq 0$ ) aun podemos estudiarlo por métodos de derivación de integrales paramétricas, mientras que el segundo no, según explicábamos en la sección 2.

#### 14-B Ecuación de Euler en los ceros aislados de $u'$

Nos apoyaremos, como en la sección 13, en un lema de derivación de integrales paramétricas.

Lema 14.1 Hacemos las siguientes hipótesis

1º  $u, \phi$  son  $C^2$  en el intervalo compacto  $[c, d]$ .

2º  $c < b_0 < d$ ,  $u'(b_0) = 0$ ,  $u'' \neq 0$  en  $[c, d]$ .

3º  $\Gamma \in \text{AbsC}_{\text{loc}}(A)$ ,  $\Gamma' \in L^q_{\text{loc}}(A)$  con  $q > 2$  y  $A$  un abierto que contenga el compacto  $u([c, d])$ .

Entonces, con la notación (13.1),  $g(\lambda)$  es continua en  $\lambda=0$  y

$$f'(0) = g(0)$$

(En este lema  $\Gamma$  y  $u$  no se refieren al problema  $\alpha\beta\Gamma$ , es decir,  $\Gamma$  y  $u$  sólo verifican las hipótesis enunciadas en el lema).



Comparando con el lema 13.1, la dificultad que aparece ahora es que de la integrabilidad de  $\Gamma'(u(x))$   $u'(x)$  no se deduce tan fácilmente como antes la integrabilidad de  $\Gamma'(u(x))$ . Aquí el papel esencial lo juega la hipótesis  $\Gamma' \in L^q$  con  $q > 2$ . En la demostración, desde luego, tratamos esta dificultad para  $\Gamma'(u(x) + \lambda\phi(x))$  y no sólo para  $\Gamma'(u(x))$ .

Podemos suponer  $u'' > 0$ . Entonces  $u'(c) < 0$ ,  $u'(d) > 0$  y

$$u''(x) + \lambda\phi''(x) \geq \text{Cte} > 0 \quad (14.1)$$

para todo  $x \in [c, d]$  y todo  $\lambda$  de un entorno de cero. Sea  $x=b(\lambda)$  la función definida implícitamente por

$$u'(x) + \lambda\phi'(x) = 0, \quad x \in [c, d]$$

Para  $|\lambda|$  suficientemente pequeño  $u'(c) + \lambda\phi'(c) < 0$ ,  $u'(d) + \lambda\phi'(d) > 0$  y  $u'(x) + \lambda\phi'(x)$  es creciente en  $x$  por (14.1), luego  $b(\lambda)$  está definida de manera única. Por el teorema de las funciones implícitas  $b(\lambda)$  es  $C^1$ , (sólo usaremos la continuidad de  $b(\lambda)$ ). Nótese que  $b_0 = b(0)$ .

Integrando (14.1) entre  $x$  y  $b(\lambda)$  resulta :

$$|u'(x) + \lambda\phi'(x)| \geq \text{Cte} |x - b(\lambda)| \quad (14.2)$$

para todo  $x \in [c, d]$  y todo  $\lambda$  en un entorno de cero.

A partir de aquí seguiremos los tres pasos de la demostración del lema 13.1. El problema de que las hipótesis sobre  $\Gamma$  sólo se cumplen en el abierto  $A$  se soluciona con una construcción como la (6.1) y omitimos repetirlo aquí. En lo que sigue se sobreentiende  $\lambda$  "en un entorno de cero".

1. Para cada  $\lambda$ ,  $u'(x) + \lambda\phi'(x)$  es negativa en  $(c, b(\lambda))$  y positiva en  $(b(\lambda), d)$  luego por lo dicho en el lema 13.1  $\Gamma'(u(x) + \lambda\phi(x))$  está definida c.t.p. y es medible en cada uno de esos intervalos y, por tanto, en  $[c, d]$ . Para ver que es integrable empleamos la hipótesis  $\Gamma' \in L^q$ ,  $q > 2$ . Más precisamente, vamos a ver que

$$\int_c^d \left| \Gamma'(u(x) + \lambda \phi(x)) \phi(x) \right| dx \leq \text{Cte independiente de } \lambda \quad (14.3)$$

En efecto, multiplicando y dividiendo por  $|u' + \lambda \phi'|^{1/q}$  y usando la desigualdad de Hölder resulta esta integral acotada por :

$$\left( \int_c^d |\Gamma'(u + \lambda \phi)|^q |u' + \lambda \phi'| dx \right)^{1/q} \left( \int_c^d \frac{|\phi|^{q'} dx}{|u' + \lambda \phi'|^{q'/q}} \right)^{1/q'}$$

En la primera integral puede hacerse el cambio de variable  $s = u(x) + \lambda \phi(x)$  en  $(c, b(\lambda))$  por un lado y en  $(b(\lambda), d)$  por otro, lo que da

$$\int_{u(b(\lambda)) + \lambda \phi(b(\lambda))}^{u(c) + \lambda \phi(c)} |\Gamma'(s)|^q ds + \int_{u(b(\lambda)) + \lambda \phi(b(\lambda))}^{u(d) + \lambda \phi(d)} |\Gamma'(s)|^q ds \quad (14.4)$$

que es una función continua de  $\lambda$  porque  $\Gamma' \in L^q$ . Por otra parte, de (14.2)

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{|\phi|^{q'} dx}{|u' + \lambda \phi'|^{q'/q}} &\leq \text{Cte} \int_c^d \frac{dx}{|x - b(\lambda)|^{q'/q}} = \\ &= \text{Cte} \left[ |x - b(\lambda)|^{1 - \frac{q'}{q}} \operatorname{sgn}(x - b(\lambda)) \right]_{x=c}^{x=d} \end{aligned} \quad (14.5)$$

que es una función continua de  $\lambda$  porque  $q > 2$  implica  $q'/q < 1$ .

2. Veamos que  $g(\lambda)$  es continua en  $\lambda = 0$ . Por ser  $b_0 = b(0)$  y  $b(\lambda)$  continua, dado cualquier  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$|b(\lambda) - b_0| < \varepsilon \quad (14.6)$$

para todo  $\lambda$  en un entorno de cero. Aplicamos a  $\Gamma'(u + \lambda \phi) \phi$  la igualdad simbólica

$$\int_c^d = \int_c^{b_0 - \varepsilon} + \int_{b_0 - \varepsilon}^{b_0 + \varepsilon} + \int_{b_0 + \varepsilon}^d$$

y llamamos  $g_1(\lambda)$ ,  $g_2(\lambda)$  y  $g_3(\lambda)$ , respectivamente, a los sumandos, de modo que

$$g(\lambda) = g_1(\lambda) + g_2(\lambda) + g_3(\lambda)$$

$$|g(\lambda) - g(0)| \leq |g_1(\lambda) - g_1(0)| + |g_3(\lambda) - g_3(0)| + |g_2(\lambda)| + |g_2(0)|$$

Las funciones  $g_1(\lambda)$  y  $g_3(\lambda)$  son continuas en  $\lambda$  porque verifican las hipótesis del lema 13.1, en virtud de (14.6).

Por tanto

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} |g(\lambda) - g(0)| \leq |g_2(0)| + \limsup_{\lambda \rightarrow 0} |g_2(\lambda)| \quad (14.7)$$

Acotamos  $g_2(\lambda)$  aplicando (14.4) y (14.5) al intervalo  $(b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon)$ . La fórmula (14.4) no la escribimos explícitamente, sino que sólo ponemos que está mayorada por una constante independiente de  $\lambda$ .

$$|g_2(\lambda)|^{q'} \leq \text{Cte} \left[ |x - b(\lambda)|^{1 - \frac{q'}{q}} \operatorname{sgn}(x - b(\lambda)) \right]_{x=b_0 - \varepsilon}^{x=b_0 + \varepsilon}$$

De esta se deduce :

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} |g_2(\lambda)|^{q'} \leq \text{Cte} \varepsilon^{1 - \frac{q'}{q}}$$

De la misma forma se obtiene

$$|g_2(0)|^{q'} \leq \text{Cte} \varepsilon^{1 - \frac{q'}{q}}$$

Las dos últimas desigualdades junto con (14.7) nos dan el resultado buscado, a saber,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} |g(\lambda) - g(0)| = 0$  cuando  $\lambda \rightarrow 0$ .

3. El último paso consiste en probar que  $\int g(\lambda) d\lambda = f(\lambda) + \text{Cte}$ . Empleando (14.3), la demostración es como en el lema 13.1.

Nota El lema 14.1 puede generalizarse, en la hipótesis  $q > j$ , a un punto donde sea  $u^{(j)}$  continua no nula y  $u', u'', \dots, u^{(j-1)}$  nulas. Esta generalización es útil para problemas  $\Gamma$  de mayor orden (en una dimensión).

Lema 14.2 Ecuación de Euler en los ceros aislados de  $u'$

Sea el problema  $\alpha \beta \Gamma$  con  $\Gamma \in \text{Abs } C_{loc}^q(R)$  y  $\Gamma' \in L_{loc}^q(R - \{0\})$ ,  $q > 2$ . Sea  $b$  un punto tal que  $u''$  es continua en  $b$ ,  $u'(b) = 0$ ,  $u''(b) \neq 0$  y  $u(b) \neq 0$ .

Entonces existe un entorno de  $b$  si  $b > 0$ , o un entorno a la derecha de  $b$  si  $b = 0$ , en el que  $\Gamma'(u(x))$  está definida c.t.p., es integrable y

$$u^{iv}(x) = -\Gamma'(u(x)) \quad \text{c.t.p.}$$

En particular,  $u'''$  es continua en  $b$ .

La hipótesis  $u(b) \neq 0$  se introduce por comodidad para el uso posterior del lema. A causa de ella ponemos  $\Lambda = \mathbb{R} - \{0\}$  en la hipótesis sobre  $\Gamma'$ .

Como  $b$  es un cero aislado de  $u'$ , el lema 13.2 nos da que  $u''$  es continua en un entorno de  $b$ , y no sólo en  $b$ . (En un entorno a la derecha si  $b = 0$ ).

El que  $\Gamma'(u(x))$  está definida c.t.p. y es integrable se obtiene como en el paso 1 de la demostración del lema anterior.

En el caso  $b = 0$ , la continuidad de  $u'''$  significa (convenios de la sección 1-C) que existe y es finito el límite lateral  $u'''(0^+)$ , y la ecuación de Euler en un entorno a la derecha es solamente el lema 13.2.

En el caso  $b > 0$ , la ecuación de Euler se obtiene como en el lema 13.2, empleando ahora el lema 14.1 en vez del 13.1.

15. Estudio del extremo del soporte cuando  
el número de arcos es finito

En lo que sigue conviene recordar las hipótesis y los ejemplos de la sección i-E. En la presente sección todas las hipótesis sobre  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  pueden exigirse sólo en un entorno del origen, excepto la hipótesis (1.1) que ha de cumplirse globalmente.

Lema 15.1 *Suponemos que  $\Gamma$  es "definida positiva" (1.1), "semi-monótona" (1.2) y continua en el origen. Entonces, si  $u$  tiene un número finito de arcos  $u''$  es continua en  $a_\infty$ , es decir,*

$$\lim_{x \rightarrow a_\infty} u''(x) = 0$$

Podemos suponer que  $u$  es positiva en el último arco. Por el teorema 12.1  $a_\infty < \infty$  y por el lema 12.2  $u''(a_\infty^-) \geq 0$  y finito. Supongamos (reducción al absurdo) que  $u''(a_\infty^-) = K > 0$ . Trasladamos el origen al punto  $a_\infty$  y construimos una función  $v$  del conjunto de minimización de la siguiente forma :

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \leq -y \\ P(x) & \text{si } -y \leq x \leq z \\ 0 & \text{si } x \geq z \end{cases} \quad \begin{matrix} y > 0 \\ z > 0 \end{matrix} \quad (15.1)$$

$$\text{donde} \quad P(x) = A \left( \frac{z-x}{z+y} \right)^3 \quad (15.2)$$

Para que esta función  $v$  pertenezca al conjunto de minimización es suficiente que sea  $C^1$  en los puntos "de empalme"  $-y, z$ . En el punto  $z$  lo es. Imponiendo que sea  $C^1$  en  $x = -y$ , se obtiene :

$$A = u(-y) \quad , \quad z+y = 3 \frac{u(-y)}{-u'(-y)}$$

Queda por tanto un solo parámetro libre, a saber,  $y$ . Vamos a ver que para  $y$  suficientemente pequeño  $J(v) < J(u)$ , contradicción que probará el lema.

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2} \int_{-y}^z p''^2 + \int_{-y}^z \Gamma(p) - \frac{1}{2} \int_{-y}^0 u''^2 - \int_{-y}^0 \Gamma(u) \quad (15.3)$$

Cuando  $y \rightarrow 0^+$  tenemos las siguientes relaciones

$$u(-y) \sim \frac{K}{2} y^2, \quad u'(-y) \sim -Ky, \quad z+y \sim \frac{3}{2} y$$

$$\frac{1}{2} \int_{-y}^z p''^2 = \frac{1}{2} \frac{12 A^2}{(z+y)^3} \sim \frac{K^2}{2} \frac{8}{9} y$$

$$\frac{1}{2} \int_{-y}^0 u''^2 \sim \frac{K^2}{2} y$$

$$0 \leq p(x) \leq A = u(-y) \quad \text{para todo } x \in [-y, z]$$

$$\int_{-y}^z \Gamma(p(x)) dx \leq \Gamma(u(-y)) (z+y) = o(y)$$

$$\int_{-y}^0 \Gamma(u(x)) dx = o(y)$$

(En las dos últimas se utiliza la continuidad de  $\Gamma$  en el origen  $y$ , en la penúltima, el no-decrecimiento de  $\Gamma(s)$  para  $s \geq 0$ . El uso de la monotonía de  $\Gamma$  puede evitarse en este paso).

Por consiguiente resulta:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{J(v) - J(u)}{y} = \frac{K^2}{2} \left( \frac{8}{9} - 1 \right) < 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

#### Notas

a) Si se suprime la hipótesis « $\Gamma$  continua en el origen», el lema pasa a ser falso, como muestra el problema "r=0" de la sección 25.

b) Se tiene  $v \geq 0$  si  $u \geq 0$ , lo que hace este lema aplicable a problemas de minimización con la restricción  $v \geq 0$ , como el de la sección 31. Esta es una de las razones de que hayamos elegido la función  $p$  dada por (15.2).

c) A dicha elección hemos llegado después de un proceso de estudio y ensayo. Si en (15.2) ponemos un exponente  $\sigma$  en vez de 3, la demostración sigue siendo válida para todo  $\sigma > 2$ .

El valor  $\sigma=3$  es simple y además tiene la propiedad de dar el valor mínimo (con respecto a  $\sigma$ ) del límite final de la demostración.

Otras funciones interesantes para demostraciones de este tipo son las dadas por (15.4), pudiendo ponerse exponentes  $\sigma$  y  $\sigma+1$  en vez de 2 y 3. (Ha de ser  $\sigma > 3/2$  para que  $v'' \in L^2$ ).

**Lema 15.2** *Suponemos que  $\Gamma$  verifica las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3). Si  $u$  tiene un número finito de arcos, entonces:*

I.  $u'(x)u'''(x) \rightarrow 0$  y  $u(x)u'''(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow a_\infty^-$ .

II. En un entorno a la izquierda de  $a_\infty$  se tiene:

$$u'(x)u'''(x) - \frac{1}{2} u''(x)^2 + \Gamma(u(x)) = 0$$

Las afirmaciones de esta demostración se refieren a un entorno a la izquierda de  $a_\infty$ . Como  $u^{iv}$  tiene signo constante (lema 12.1), será  $u' \neq 0$ , luego por el lema 12.2 se verifica la ecuación de Euler

$$u^{iv} = -\Gamma'(u)$$

(En particular,  $u'''$  y todos los sumandos de II son funciones continuas). Multiplicando por  $u'$  e integrando resulta

$$u'u''' - \frac{1}{2} u''^2 + \Gamma(u) = K$$

Dado que por el lema (15.1)  $u''(a_\infty^-) = 0$ , tenemos

$$\lim_{x \rightarrow a_\infty^-} u'(x)u'''(x) = K \quad \text{y} \quad |u'(x)| \leq \text{Cte}(a_\infty - x)$$

Si fuera  $K \neq 0$ , resultaría

$$|u'''(x)| = \frac{K}{|u'(x)|} \geq \frac{K}{\text{Cte}(a_\infty - x)}$$

luego sería  $u'''$  no integrable (o, si se prefiriera,  $u''(a_\infty^-)$  infinito): contradicción.

Sólo falta probar que  $uu''' \rightarrow 0$ . Por la regla de l'Hôpital, cuando  $x \rightarrow a_\infty^-$

$$\lim_{x \rightarrow a_\infty^-} \frac{u}{u'} = \lim_{x \rightarrow a_\infty^-} \frac{u'}{u''} = \lim_{x \rightarrow a_\infty^-} \frac{u''}{u'''} = 0$$

(\*) En el entorno a la izquierda de  $a_\infty$  aquí considerado, excluido  $a_\infty$ .

puesto que  $u'''(a_\infty^-) \neq 0$  por el lema 12.2. (Es indiferente que  $u'''(a_\infty^-)$  sea finito o no). Por tanto

$$|u| \leq \text{Cte}|u'| \quad \text{y} \quad |u u''| \leq \text{Cte}|u' u''| \rightarrow 0$$

**Lema 15.3** Suponemos que  $\Gamma$  verifica las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3), y que  $u$  tiene un número finito de arcos.

I. Si  $\Gamma' \in L^q$ , con  $q > 3$ , en un entorno del origen, entonces

$$0 < |u'''(a_\infty^-)| \neq \infty$$

II. Si en un entorno del origen  $|\Gamma'(s)| \geq C|s|^{r-1}$  c.t.p. con  $C > 0$  y  $0 < r \leq 2/3$ , entonces

$$|u'''(a_\infty^-)| = \infty$$

Notemos que la hipótesis de I se cumple, por ejemplo, si  $|\Gamma'(s)| \leq C|s|^{r-1}$  con  $r > 2/3$ . Recordamos (sección 14-A) que a  $q$  "le corresponde"  $r = 1/q'$ .

Como  $u''(a_\infty^-) = 0$ , el lema 12.2 nos da  $u'''(a_\infty^-) \neq 0$ . Pasamos a ver que este límite es finito (punto I). Para ello vamos a ver que  $u^{iv}$  es integrable en  $(c, a_\infty)$ . En el lema anterior, vimos que  $u^{iv} = -\Gamma'(u)$ . Ahora razonamos como en las fórmulas (14.3), (14.4) y (14.5) :

$$\int_c^{a_\infty} |\Gamma'(u(x))| dx \leq \left( \int_c^{a_\infty} |\Gamma'(u)|^q u' dx \right)^{1/q} \left( \int_c^{a_\infty} \frac{dx}{|u'|^{q'/q}} \right)^{1/q'}$$

La primera integral es finita por la misma razón que (14.4). Veamos la segunda integral. Por ser  $|u'''(a_\infty^-)| > 0$

$$|u'(x)| \geq \text{Cte} (a_\infty - x)^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{|u'(x)|^{q'/q}} \leq \frac{\text{Cte}}{(a_\infty - x)^{2q'/q}}$$

Dado que  $2q'/q < 1$  equivale a  $q > 3$ , la segunda integral es también finita.

Pasamos al punto II. Supongamos (reducción al absurdo) que  $u'''(a_\infty^-)$  es finito. Entonces en un entorno de  $a_\infty$

$$u \sim \text{Cte}(a_\infty - x)^3$$



$$|u^{iv}| = |\Gamma'(u)| \geq C|u|^{r-1} \sim \text{Cte } (a-x)^{3(r-1)}$$

Por tanto, para  $3(1-r) \geq 1$ , es decir,  $r \leq 2/3$  resulta que  $u^{iv}$  no es integrable. Dado que  $u^{iv}$  tiene signo constante, esto implica  $|u'''(a_\infty^-)| = \infty$ , contradicción.

Finalmente, damos una condición suficiente muy general para que no sea finito el número de arcos. Recordamos que si  $\Gamma$  es Lip, puede darse una demostración mucho más simple (ver nota después del teorema 12.1).

Lema 15.4 *Suponemos que  $\Gamma$  verifica las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3), y además que*

$$\Gamma' \in L^q, \quad \text{con } q > 3, \quad \text{en un entorno del origen.}$$

*Entonces  $u(x; \alpha, \beta)$  tiene infinitos arcos, cualesquiera que sean  $\alpha$  y  $\beta$ .*

(En la sección 21 veremos que estas hipótesis también implican la continuidad de  $u'''$  en  $a_\infty$ ).

Aplicándolo al problema  $r$ -potencial, nos da que  $u$  tiene infinitos arcos si  $r > 2/3$ . Este resultado será mejorado hasta  $r > (2/3) - \varepsilon$  en la sección 26.

Supongamos (hipótesis de reducción al absurdo) que  $u$  tiene un número finito de arcos. Vamos a ver que entonces existe una función  $v$  del conjunto de minimización para la que  $J(v) < J(u)$ , contradicción que probará el lema. El método de demostración es como el del lema 15.1.

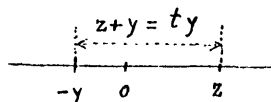
Podemos suponer  $u > 0$  en el último arco. Por el lema 15.1  $u''(a_\infty^-) = 0$ . Por el lema 15.3  $u'''(a_\infty^-) = -K$ , con  $0 < K < \infty$ . Trasladando el origen al punto  $a_\infty$  tendremos cuando  $y > 0^+$

$$u(-y) \sim \frac{K}{6} y^3, \quad u'(-y) \sim -\frac{K}{2} y^2, \quad u''(-y) \sim Ky$$

La función  $v$  vendrá dada por (15.1) y  $J(v) = J(u)$  por (15.3), pero ahora  $P(x)$  será el polinomio de tercer grado tal que

$$P(-y) = u(-y) \quad , \quad P'(-y) = u'(-y) \quad , \quad P(z) = P'(z) = 0$$

Ponemos  $z = (t-1)y$  ,  $t > 1$   
(ver figura). Vamos a hacer  $y \rightarrow 0^+$   
manteniendo  $t$  fijo. La idea esen-



cial es que los términos en  $\Gamma(P)$   
y  $\Gamma(u)$  de (15.3) tienden a cero con  $y$  más deprisa que los  
términos en  $P''$  y  $u''$ .

Algunos cálculos elementales dan

$$P(x) = -A \left( \frac{z-x}{z+y} \right)^2 + B \left( \frac{z-x}{z+y} \right)^3 \quad (15.4)$$

$$A = -u'(-y)(z+y) - 3u(-y) \sim \frac{K}{2} (t-1) y^3$$

$$B = A + u(-y) \sim \frac{K}{2} (t-\frac{2}{3}) y^3$$

Consideremos en la fórmula (15.3) los términos en  $\Gamma(P)$   
y  $\Gamma(u)$ . Para estos términos no escribiremos la dependencia  
en  $t$ , pues no la necesitaremos. Para todo  $x \in [-y, z]$

$$|P(x)| \leq |A| + |B| = O(y^3)$$

Por ser  $\Gamma' \in L^q$  con  $q > 3$ , el lema 5.1 nos da

$$\Gamma(s) \leq Cte |s|^r \quad \text{con} \quad r > 2/3$$

$$\int_{-y}^z \Gamma(P(x)) dx \leq Cte \int_{-y}^z |P(x)|^r dx \leq [O(y^3)]^r (z+y) = O(y^{3r+1})$$

De forma algo más simple resulta

$$\int_{-y}^0 \Gamma(u(x)) dx = O(y^{3r+1})$$

Pasamos a considerar los términos en  $P''$  y  $u''$  de (15.3).  
Ahora escribimos la dependencia en  $t$  en forma de  $O$  de Landau.  
cuando  $t \rightarrow \infty$ . Dado que para todo  $x \in [-y, z]$

$$|P''(x)| \leq \frac{2|A| + 6|B|}{(z+y)^2} = O\left(\frac{1}{t}\right) O(y)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-y}^z P''(x)^2 dx \leq \left[ O\left(\frac{1}{t}\right) O(y) \right]^2 (z+y) = O\left(\frac{1}{t}\right) O(y^3)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-y}^0 u''(x)^2 dx \sim \frac{K^2}{6} y^3$$

Teniendo en cuenta que  $3r+1 > 3$  porque  $r > 2/3$ , resulta

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{J(v) - J(u)}{y^3} = 0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{K^2}{6}$$

que es negativo para  $t$  suficientemente grande. Q.E.D.

Nota Para  $y$  pequeño,  $A$  y  $B$  son positivos en virtud de las fórmulas contiguas a (15.4). Por tanto  $v$  tiene valores negativos en las proximidades de  $x=z$ . Si tuviéramos  $J(v) < J(u)$  con  $v \geq 0$  llegaríamos a la conclusión absurda de que también el problema de la sección 31 tiene infinitos arcos. Confróntese con las notas b) y c) que siguen al lema 15.1.

También conviene señalar que los cálculos explícitos de la anterior demostración pueden obviarse casi totalmente expresando todas las relaciones mediante  $O$  y  $o$  de Landau. Así, estos métodos pueden aplicarse a problemas de mayor orden casi con el mismo trabajo.

## PARTE V

EL PROBLEMA  $\Gamma$  : RESULTADOS PRINCIPALES

En esta parte se estudia el problema  $\Gamma$  cuando  $\Gamma$  verifica a la vez las tres hipótesis básicas (1.1), (1.2) y (1.3) , pág. 12 .



## 16. Ecuación de Euler y otras ecuaciones integrales/diferenciales

## 16-A Enunciado de tres teoremas fundamentales

$M(0, a_\infty)$  designa el espacio de las medidas de Radon sobre  $(0, a_\infty)$ .

## Teorema 16.1 Ecuación de Euler

En las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3):

I.  $u^{iv} \in M(0, a_\infty)$ ,  $uu^{iv} \leq 0$ ,  $\Gamma'(u(x))$  está definida c.t.p. en  $(0, a_\infty)$  y  $\Gamma'(u(x)) \in L^1_{loc}(0, a_\infty)$ .

II.  $u^{iv} + \Gamma'(u) + \Delta = 0$  en  $M(0, a_\infty)$

donde la medida  $\Delta$  está dada por (16.2): verifica  $u\Delta \geq 0$ , está concentrada en los ceros de  $u'$  y todos los ceros de  $u'$  en  $(0, a_\infty)$  son puntos aislados.

III.  $\Delta=0$  si además  $\Gamma' \in L^q_{loc}(R-\{0\})$  con  $q > 2$ .

La expresión  $uu^{iv}$  está definida como multiplicación de una función continua por una medida.

Conviene señalar que la distribución  $u^{iv}$  puede no ser una medida sobre  $R^+$ , a causa de la singularidad en  $a_\infty$ . Ejemplo: el problema  $\alpha\beta r$  con  $0 < r \leq 2/3$  (sección 11).

En el problema  $r$ -potencial se tiene  $\Delta=0$  para todo  $r > 0$ .  $\Delta=0$  implica, desde luego,  $\Delta_1=0$  en el teorema siguiente.

## Teorema 16.2 en las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3):

I. Para todo  $x \geq 0$  que no sea un cero de  $u'$

$$u(x)u'''(x) - u'(x)u''(x) = \int_x^{a_\infty} u'' + \int_x^{a_\infty} u\Gamma'(u) + \Delta_1(x)$$

donde la función no-creciente y no-negativa  $\Delta_1$  es la primitiva de  $-u\Delta$  que verifica  $\Delta_1(a_\infty^-)=0$ . Ver fórmula (16.4).

En particular, es estrictamente positiva y estrictamente de creciente en  $(0, a_\infty)$  y tiene límite nulo en  $a_\infty$  la función

$$u(x)u'''(x) - u'(x)u''(x)$$

II. En  $(0, a_\infty)$  la función

$$u'(x)^2 - u(x) u''(x)$$

es positiva, decreciente y convexa (las tres cosas estrictamente), y tiene límite nulo en  $a_\infty$ .

Teorema 16.3 En las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3), se verifica para todo  $x \in (0, a_\infty)$

$$I. \quad u'(x)u'''(x) - \frac{1}{2} u''(x)^2 + \Gamma(u(x)) = 0$$

donde los tres sumandos son continuos en  $(0, a_\infty)$ .

$$II. \quad -u'(x)u''(x) = \frac{3}{2} \int_x^{a_\infty} u''^2 - \int_x^{a_\infty} \Gamma(u)$$

Estos teoremas están muy relacionados con cuestiones de regularidad, según detallaremos en la sección 21. En particular, adelantamos que los tres sumandos de la ecuación diferencial del teorema 16.3 resultarán ser continuos en  $\bar{R}^+$ .

Los lemas de la parte anterior reducen las dificultades de la demostración a dos cuestiones: 1) Obtener que el conjunto de los ceros de  $u'$  en  $(0, a_\infty)$  es "suficientemente sencillo", lo que se concretará de momento en que es un conjunto de puntos aislados. 2) Obtener que tienden a cero en  $a_\infty$  varias de las funciones involucradas o, lo que es lo mismo, que son cero ciertas constantes de integración. Prácticamente sólo habrá que considerar el caso de infinitos arcos, pues el caso contrario es casi inmediato a partir de los resultados de la sección 15.

Comentamos que si además  $\Gamma \in \text{Lip}_{\text{loc}}(R)$  las demostraciones se simplifican mucho gracias al corolario 6.1.

Nota El punto II del teorema 16.2 es válido en dimensión dos enunciado en la forma siguiente (Schaefer [1]): Si  $\Delta^2 u + f(u) = 0$  y  $f(s) \geq 0$  (y otras hipótesis de regularidad), entonces la función  $|\text{grad } u|^2 - u \Delta u$  alcanza su

máximo en la frontera del dominio. El caso  $f \equiv 0$  se encuentra ya en Miranda [1].

#### 16-B Algunos lemas auxiliares

En las mismas hipótesis sobre  $\Gamma$ .

Lema 16.1 En  $(0, a_\infty)$

I.  $u^{iv}$  es una medida y  $u u^{iv} \leq 0$ .

II.  $u'''$  es monótona en cada arco de  $u$ , continua donde  $u' \neq 0$ , con límites laterales finitos en cada punto  $b$  ( $0 < b < a_\infty$ ) donde se anula  $u'$ . Por tanto  $u' u'''$  es continua también en cada punto  $b$ .

III.  $u''$  es cóncava o convexa en cada arco de  $u$  y continua en  $(0, a_\infty)$ .

(Este lema será mejorado en la sección 21).

En  $(0, a_\infty)$   $u$  y  $u'$  no se anulan simultáneamente (teorema 5.2). Los puntos en que  $u \neq 0$  se tratan con el lema 12.1 y los puntos en que  $u' \neq 0$  con el lema 13.2. Recuérdese también el lema 1.1.

Lema 16.2 En  $(0, a_\infty)$

$$u'(x)u'''(x) - \frac{1}{2}u''(x)^2 + \Gamma(u(x)) = K \quad \text{con} \quad K \leq 0 \quad (16.1)$$

(La demostración de que  $K=0$  es la principal dificultad del teorema 16.3. Está estrechamente relacionado con la continuidad de  $u''$  en  $a_\infty$ ).

Por ser  $u''$  cóncava o convexa, en cada arco  $u'$  o bien tiene un intervalo cerrado de ceros, o bien tiene a lo más tres ceros aislados. Por tanto podemos descomponer  $(0, a_\infty)$  en una sucesión numerable de intervalos abiertos contiguos en los que o bien  $u'=0$  o bien  $u' \neq 0$ . En cada intervalo donde  $u' \neq 0$  es válida,



por el lema 13.2, la ecuación de Euler  $u^{iv} = -\Gamma'(u)$ . Multiplicándola por  $u'$  e integrando se obtiene la ecuación del lema. En los intervalos en que  $u' \neq 0$ , dicha ecuación se reduce a la relación trivial  $\Gamma(u) = K$ . A priori, la constante  $K$  podría ser distinta en cada intervalo, pero la continuidad del primer miembro nos da que es la misma en todo  $(0, a_\infty)$ .

Veamos que  $K \leq 0$ . Si  $u$  tiene un número finito de arcos, el lema 15.2 nos da  $K = 0$ . Si  $u$  tiene infinitos arcos, tomando en (16.1) el límite cuando  $x \rightarrow a_\infty$  a lo largo de los ceros de  $u'$  resulta

$$K = -\frac{1}{2} \lim u''^2 \leq 0$$

#### Lema 16.3

- I.  $u'$  y  $u''$  no se anulan simultáneamente en  $(0, a_\infty)$ .
- II. Los ceros de  $u'$  y de  $u''$  en  $(0, a_\infty)$  son aislados.

(Este lema será mejorado en la sección 17).

En efecto, si se anulan simultáneamente (16.1) nos da  $\Gamma(u) = K$ , lo que es imposible porque  $\Gamma$  es definida positiva,  $u \neq 0$  y  $K \leq 0$ . Por tanto, los ceros de  $u'$  en  $(0, a_\infty)$  son aislados.

En cada arco de  $u$ ,  $u''$  tiene (por concavidad o convexidad) o bien un intervalo  $E$  de ceros, o bien a lo más dos ceros aislados. En el primer caso es  $u''' = 0$  en  $E$ , luego  $\Gamma(u) \equiv K \leq 0$  en  $E$ , luego  $u \equiv 0$  en  $E$ , lo que es imposible. Por tanto, los ceros de  $u''$  en  $(0, a_\infty)$  son aislados.

#### Lema 16.4 $u''$ está acotada en un entorno de $a_\infty$ .

(Después veremos que de hecho  $u''(a_\infty^-) = 0$ ).

Si  $u$  tiene un número finito de arcos, sabemos ya que  $u''(a_\infty^-) = 0$  por el lema 15.1 (aquí sería suficiente el lema 12.2).

Sea  $u$  con infinitos arcos. En los extremos locales de  $u''$  es  $u''' = 0$ , o bien  $u' = 0$  si  $u'''$  no es continua. Por tanto, de (16.1) resulta que es finito el límite  $\int u''^2$  cuando  $x \rightarrow a_\infty$  a lo largo de los extremos de  $u''$ . Q.E.D.

16-C Demostración del teorema 16.1

Punto I.  $\Gamma'(u(x))$  está definida c.t.p. por el lema 13.2 y el lema 16.3. El lema 13.2 también nos da que  $u^{iv} = -\Gamma'(u)$  en  $L^1_{loc}(\Omega)$ , siendo  $\Omega$  el conjunto donde  $u' \neq 0$ . Veamos que  $\Gamma'(u) \in L^1_{loc}(0, a_\infty)$ . Basta ver que  $\Gamma'(u) \in L^1$  en un entorno a la derecha y en un entorno a la izquierda de cada cero de  $u'$ , puesto que en cada compacto de  $(0, a_\infty)$  hay sólo un número finito de ceros de  $u'$ . Sea pues  $b$ ,  $0 < b < a_\infty$ , un cero de  $u'$  y  $E$  un entorno lateral de  $b$  en el que  $u^{iv}$  tiene signo constante. Como  $u'''$  tiene límites laterales finitos en  $b$ , integrando  $u^{iv} = -\Gamma'(u)$  en  $E$  resulta que  $\Gamma'(u) \in L^1(E)$ . Q.E.D. (El resto del punto I está en el lema 16.1).

(Es de notar que el anterior razonamiento no es aplicable a  $b=0$  ni a  $b=a_\infty$ . Ver la sección 21).

Punto II. Dado que  $u^{iv} + \Gamma'(u)$  (que será  $-\Delta$ ) es una medida sobre  $(0, a_\infty)$  nula en  $\Omega$ , es igual a una masa de Dirac en un entorno de cada cero de  $u'$  (porque toda medida concentrada en un punto es proporcional a una delta de Dirac). Más detalladamente :

$$\Delta = \sum_n \sigma_n \delta(x - b_n) \quad , \quad \sigma_n u(b_n) \geq 0 \quad (16.2)$$

donde la suma se extiende a los ceros  $\{b_n\}$  ( $0 < b_n < a_\infty$ ) de  $u'$  y  $\sigma_n$  es el salto de  $u'''$  en  $b_n$  cambiado de signo.

Punto III. Resulta del lema 16.3 y del lema 14.2.

16-D Demostración del teorema 16.2

Punto I. La existencia de  $\Delta_1$  y de la segunda integral resulta a lo largo de la demostración.

$$-\frac{d}{dx} (u u''' - u' u'') = u''^2 - u u^{iv} = u''^2 + u \Gamma'(u) + u \Delta \geq 0 \quad (16.3)$$

Por tanto  $u u''' - u' u''$  es decreciente. El decrecimiento es estricto porque  $u''$  sólo tiene ceros aislados en  $(0, a_\infty)$ , en

virtud del lema 16.3. Vamos a ver que

$$\lim_{x \rightarrow a_{\infty}^-} (u u''' - u' u'') = 0$$

El límite existe debido al decrecimiento. Por el lema 16.4  $u' u'' \rightarrow 0$ . Por tanto el límite de  $u u'''$  existe. Si hay infinitos arcos, resulta que es cero calculándolo a lo largo de los ceros de  $u$ . Si hay un número finito de arcos, también es cero por el lema 15.2.

De (16.2) y (16.3) se deduce para  $0 < x_1 < x_2 < a_{\infty}$  y  $u'(x_1) \neq 0 \neq u'(x_2)$

$$-\left[ u u''' - u' u'' \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} u''^2 + \int_{x_1}^{x_2} u \Gamma'(u) + \sum_{x_1 < b_n < x_2} \sigma_n u(b_n) \theta(x - b_n)$$

donde  $\theta$  es la función escalón unidad. La suma tiene sólo un número finito de sumandos y  $\Gamma'(u) \in L^1(x_1, x_2)$ . Ahora hacemos  $x_2 \rightarrow a_{\infty}$ . El primer miembro tiene límite finito. En el segundo miembro cada sumando es no-negativo y no-decreciente respecto de  $x_2$ , luego cada sumando tiene límite finito. Ello prueba el punto I. En particular,

$$\Delta_1(x)' = \sum_{x < b_n} \sigma_n u(b_n) \theta(x - b_n) \quad (16.4)$$

con  $\sigma_n$  de (16.2), (\*)

Punto II. Inmediato de

$$-\frac{d}{dx} (u'^2 - u u'') = u u''' - u' u''$$

#### 16-E Demostración del teorema 16.3

Punto I. Partiendo del lema 16.2, sólo falta ver que  $K=0$  en el caso de infinitos arcos. (En el caso contrario ya sabemos que  $K=0$  por el lema 15.2). Usaremos el siguiente resultado:

-----  
(\*)  $\theta(t)=0$  si  $t < 0$ ,  $\theta(t)=1$  si  $t > 0$ .

Lema 16.5 Si  $u$  es una solución del problema  $\alpha\beta\Gamma$  y si  $b$  es un cero de  $u'$ , entonces

$$\frac{3}{2} \int_b^\infty u''^2 = \int_b^\infty \Gamma(u)$$

(En este lema no se hace ninguna hipótesis sobre  $\Gamma$ ).

La función  $v(x) = u\left(b + \frac{x-b}{t}\right)$  verifica  $v(b) = u(b)$ ,  $v'(b) = 0$  para todo  $t > 0$ . Llamemos  $J_b$  al funcional con integrales tomadas desde  $b$  en vez de cero. Haciendo el cambio  $y = b + \frac{x-b}{t}$  resulta:

$$J_b(v) = \frac{t^3}{2} \int_b^\infty u''(y)^2 dy + \frac{1}{t} \int_b^\infty \Gamma(u(y)) dy$$

Como esta expresión se hace mínima para  $v=u$ , el lema resulta de

$$\left. \frac{d J_b(v)}{dt} \right|_{t=1} = 0$$

Seguimos con la demostración del punto I. Integrando (16.1):

$$\left[ u' u'' \right]_{x_1}^{x_2} - \frac{3}{2} \int_{x_1}^{x_2} u''^2 + \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(u) = K(x_2 - x_1) \quad (16.5)$$

Haciendo  $x_1 = b$  y  $x_2 \rightarrow a_\infty$ , los lemas 16.4 y 16.5 nos dan

$$0 = K(a_\infty - b)$$

lo que prueba que  $K=0$  siempre que  $u'$  tenga al menos un cero  $b < a_\infty$ ; en particular, siempre que  $u$  tenga infinitos arcos.

Punto II. Es (16.5) con  $x_2 \rightarrow a_\infty$ ,  $K=0$ .

Corolario 16.1  $u''$  y  $u'u'''$  son continuas en  $a_\infty$ , es decir

$$u''(x) \rightarrow 0 \quad y \quad u'(x)u'''(x) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a_\infty$$

(En la sección 21 obtendremos también la continuidad absoluta hasta  $a_\infty$ ).

Demostración como la del lema 16.4. Ahora (por ser  $K=0$ ) resulta nulo el límite de  $u''^2$  a lo largo de los extremos de  $u$ .

#### Notas

a) Hemos demostrado los teoremas 16.1 y 16.2 sin conocer previamente que  $K=0$ .

b) La demostración de que  $K=0$  dada en esta sección es breve, pero tiene el inconveniente de apoyarse de manera esencial en la forma potencial del término en  $u''$  (por usar el lema 16.5). En la nota 18.3 indicaremos otra demostración de que  $K=0$  para el caso de infinitos arcos.

c) Si  $\beta < 0$  puede ocurrir (secciones 26 a 28) que  $u$  tenga sólo un arco incompleto y  $u'$  no se anule nunca antes de  $a_\infty$ . Entonces sólo conocemos el método del lema 15.1 para demostrar que  $K=0$ .

d) Si se supone que el soporte no es compacto (es decir,  $a_\infty = \infty$ ), resulta  $K=0$  inmediatamente de (16.5). En efecto, haciendo  $x_2 \rightarrow a_\infty$  resultaría "finito=infinito" si fuera  $K \neq 0$ . Este camino siempre podrá seguirse si sólo se desea demostrar la compacidad del soporte, pues puede partirse (por reducción al absurdo) de suponer  $a_\infty = \infty$ .

17. Estructura de los arcos de  $u$   
y algunas acotaciones

17-A Estructura de los arcos de  $u$

Teorema 17.1 (Ver figura de la página siguiente).

En las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3), consideremos el arco  $(a_n, a_{n+1})$  de  $u$ . Entonces:

$$I. \quad u'(a_n) u''(a_n) < 0 \quad \text{y} \quad u'(a_n) u'''(a_n) > 0$$

II. En  $[a_n, a_{n+1}]$   $u'$  tiene un único cero  $b_n$ ,  $u''$  un único cero  $c_n$  y  $u'''$  tiene o bien un único cero  $d_n$  o bien un intervalo cerrado de ceros  $[d_n, \bar{d}_n]$ . Esto último se excluye si además la monotonía de  $\Gamma$  es estricta.

$$III. \quad a_n < b_n < c_n < d_n \leq \bar{d}_n < a_{n+1}$$

(En este teorema puede ser tanto  $a_{n+1} < a_\infty$  como  $a_{n+1} = a_\infty$ . En la figura se supone  $a_{n+1} \neq a_\infty$ . Los puntos angulosos de  $u'''$  que se han dibujado corresponden al caso en que  $\Gamma'$  es no-acotada en el origen).

El punto I es inmediato de los teoremas 16.2 y 16.3. Recordando que  $u'''$  es monótona y  $u''$  cóncava o convexa en el arco, los puntos II y III se deducen del punto I con razonamientos elementales.

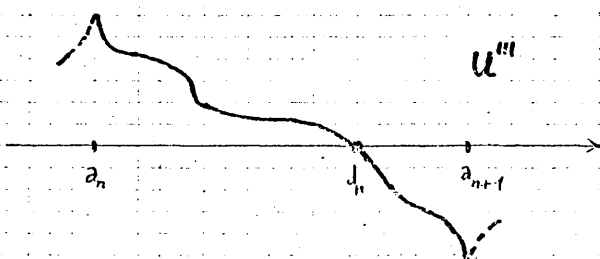
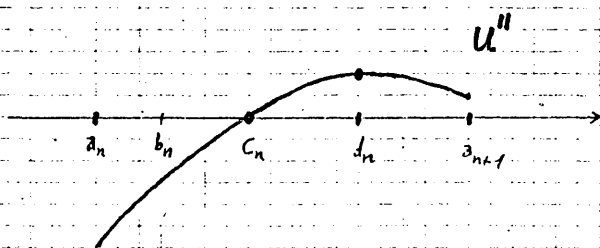
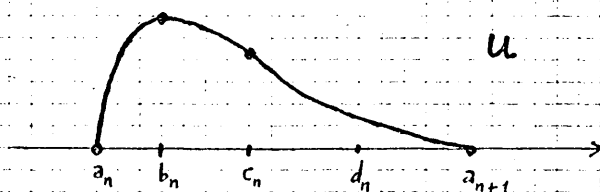
Teorema 17.2 (\*) Asumimos las mismas hipótesis que en el anterior teorema. En el punto III se supone además que existen los arcos mencionados.

$$I. \quad |u'(a_n)| > |u'(c_n)| > |u'(d_n)| > |u'(a_{n+1})|$$

$$II. \quad |u''(a_n)| > |u''(b_n)| \geq |u''(d_n)| > |u''(a_{n+1})|$$

$$III. \quad |u(b_n)| > |u(b_{n+2})|. \quad \text{Si además } \Gamma \text{ es par, entonces } |u(b_n)| > |u(b_{n+1})|$$

(\*) Ver también el corolario 23.2 (p.137) sobre el problema  $\alpha\beta$  con  $r > 1$ .



Es conveniente ayudarse con la figura y puede suponerse  $u > 0$  en  $(a_n, a_{n+1})$ .

Punto I.  $|u'(a_n)| > |u'(c_n)|$  porque la función  $u'^2 - uu''$  es estrictamente decreciente por el teorema 16.2. El resto está implicado por el teorema anterior.

Punto II. Veamos que  $|u''(b_n)| \geq |u''(d_n)|$ . Por la estructura de  $u$

$$|u(b_n)| > |u(d_n)|$$

y por el teorema 16.3 y la monotonía de  $\Gamma$

$$\frac{1}{2} u''(b_n)^2 = \Gamma(u(b_n)) \geq \Gamma(u(d_n)) = \frac{1}{2} u''(d_n)^2$$

Las otras desigualdades del punto II están implicadas por el teorema anterior.

Punto III. Por el punto II y el teorema 16.3

$$\Gamma(u(b_n)) = \frac{1}{2} u''(b_n)^2 > \frac{1}{2} u''(b_{n+2})^2 = \Gamma(u(b_{n+2}))$$

Como  $\Gamma$  es semi-monótona (1.2) y  $u(b_n)$  tiene el mismo signo que  $u(b_{n+2})$ , resulta  $|u(b_n)| > |u(b_{n+2})|$ . Si  $\Gamma$  es par no se necesita que los valores de  $u$  tengan el mismo signo.

#### 17-B Algunas acotaciones

Los resultados de este apartado, junto con el teorema 17.2, permiten acotar explícitamente los supremos de  $|u|$ ,  $|u'|$  y  $|u''|$  en  $\mathbb{R}^+$ . Las cotas de  $u'''$  también serán usadas en la demostración de la integrabilidad global de  $u^2 v$ , así como en la demostración de soporte compacto de la sección 22.

Teorema 17.3 Asumimos las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3).

Si además

$$\Gamma(s) \geq \frac{C}{r} |s|^r, \quad C > 0, \quad r > 0 \quad (17.1)$$



entonces para  $a_n < a_\infty$

$$|u(b_n)| < \left(\frac{r}{2C}\right)^{\frac{1}{2+r}} |u'(a_n)|^{\frac{4}{2+r}}$$

Por el teorema 16.3  $u''(b_n)^2 = 2\Gamma(u(b_n)) \geq \frac{2C}{r} |u(b_n)|^r$

Por el decrecimiento de  $u'^2 - uu''$  (teorema 16.2)

$$u'(a_n)^2 > |u(b_n)u''(b_n)| \geq |u(b_n)| \sqrt{\frac{2C}{r} |u(b_n)|^r} \quad \text{Q.E.D.}$$

El siguiente teorema se fundamenta, en esencia, en comparar el problema  $\Gamma$  con el problema  $r$ -potencial. En el fondo subyace el método de semejanza, pero preferimos dar aquí una demostración directa que no requiere ningún conocimiento previo sobre dicho método ni sobre el problema  $r$ -potencial.

**Teorema 17.4** En la hipótesis

$$\Gamma(s) \leq \frac{C}{r} |s|^r, \quad C > 0, \quad r > 0 \quad (17.2)$$

se tiene

$$M(0, \beta) \leq C_3 \beta^{\frac{2+3r}{2+r}}$$

donde  $C_3$  depende sólo de  $(r, C)$  y está dada por (17.4) y (17.3).

Atención : (17.1) y (17.2) son desigualdades opuestas.

Aquí  $M(0, \beta)$  es el mínimo del funcional del problema  $\alpha\beta\Gamma$  con  $\alpha=0$ .

Tomemos una función fija  $V$  del conjunto de minimización del problema  $\alpha\beta\Gamma$  con  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$  y tal que  $V \in L^r(\mathbb{R}^+)$ . Por tanto, para todo  $t > 0$

$$v(x) = \beta t V\left(\frac{x}{t}\right)$$

pertenece al conjunto de minimización del problema  $\alpha\beta\Gamma$  con  $\alpha=0$ . En virtud de la definición de mínimo

$$M(0, \beta) \leq J(v)$$

Usando (17.2) y haciendo el cambio  $y = tx$  en las integrales resulta

$$J(v) \leq C_1 \frac{\beta^2}{t} + C_2 \beta^r t^{r+1}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty (V''(y))^2 dy, \quad C_2 = \frac{C}{r} \int_0^\infty |V(y)|^r dy \quad (17.3)$$

Minimizando esta expresión con respecto a  $t$  se obtiene el teorema con

$$C_3 = \frac{2+r}{\frac{1+r}{2+r}} C_1^{\frac{1+r}{2+r}} C_2^{\frac{1}{2+r}} \quad (17.4)$$

Nota Este teorema está estrechamente relacionado con el teorema 9.2. Naturalmente, cada función  $V$  nos da una constante  $C_3$ . Confrontando con el teorema 9.2, se deduce que el valor óptimo (mínimo) de  $C_3$  es  $M(0, 1, r)$ , es decir, el mínimo del problema  $\alpha\beta r$  con  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ .

Teorema 17.5 Asumimos (1.1), (1.2) y (1.3). Si además se cumple (17.2) y  $a_n < a_\infty$ , entonces

$$|u''(a_n)| < 3 C_3 |u'(a_n)|^{\frac{2r}{2+r}}$$

$$|u'''(a_n)| < \frac{9}{2} C_3^2 |u'(a_n)|^{\frac{3r-2}{2+r}}$$

Podemos trasladar el origen al punto  $a_n$ , con lo que  $u'(a_n)$  pasa a ser  $\beta$ . Por ser  $a_n < a_\infty$ , tenemos que  $\beta \neq 0$ . Por el teorema 17.4  $u'(0)u''(0) < 0$  y por el punto II del teorema 16.3

$$|u'(0)u''(0)| = -\beta u''(0) = \frac{3}{2} \int_0^\infty u''^2 - \int_0^\infty \Gamma(u) < \frac{3}{2} \int_0^\infty u''^2$$

$$< 3J(u) = 3M(0, \beta) \leq 3 C_3 \beta^{\frac{2+3r}{2+r}}$$

En el último paso se ha usado el teorema anterior. Dividiendo por  $\beta$  resulta la primera desigualdad del teorema.

Haciendo  $x=0$  en el punto I del teorema 16.3

$$\beta u'''(0) = \frac{1}{2} u''(0)^2$$

Dividiendo por  $\beta$  y usando la desigualdad ya probada para  $u''(0)$ , resulta la desigualdad para  $u'''$ .

18. Principios de comparación y decrecimiento  
geométrico de  $u'(a_n)$  y  $u''(a_n)$

Comenzamos demostrando un principio de comparación para el operador  $d^4/dx^4$  con ciertas condiciones de contorno asimétricas. Este y otros principios de comparación también reciben el nombre de principios del máximo y principios de positividad. Como es sabido, implican existencia y unicidad para el correspondiente problema de contorno, con cualesquiera datos.

Lema 18.1 Sea  $f$  una distribución sobre el intervalo  $(0, a)$  tal que  $f^{iv} \leq 0$  y  $f(0^+) = f(a^-) = f'(a^-) = f''(a^-) = 0$ .

Entonces o bien  $f \equiv 0$ , o bien  $f(x) > 0$  en  $(0, a)$ ,  $f'(0^+) > 0$  y  $f''(0^+) < 0$ .

La distribución  $f^{iv}$  es una medida porque tiene signo constante (Schwartz [1]). Por tanto (lema 1.1)  $f'''$  es no-creciente,  $f''$  es cóncava y continua y los límites indicados existen.

Por el teorema de Rolle  $f'$  y  $f''$  tienen al menos un cero interior al intervalo. Si  $f''$  tiene dos ceros interiores  $\zeta_1 < \zeta_2$ , entonces (por concavidad)  $f''$  es nula en  $(\zeta_1, a)$  y  $\leq 0$  en  $(0, a)$ . Por tanto,  $f'$  no-creciente,  $f' \geq 0$  y  $f \equiv 0$ . Luego si  $f \not\equiv 0$ , entonces  $f''$  tiene un único cero interior y  $f''(0^+) < 0$ ; por integración resulta  $f'(0^+) > 0$  y  $f(x) > 0$ .

En esta sección vamos a comparar  $u$  con un polinomio de tercer grado. Posteriormente nos interesará comparar con un polinomio de cuarto grado. Por cálculo explícito obtenemos los siguientes lemas. (El primero es, desde luego, el caso particular  $\delta=0$  del segundo).

Lema 18.2 Sea  $Q$  el polinomio definido por

$$Q^{iv}=0, \quad Q(0)=Q(a)=0, \quad Q'(a)=-\beta_1, \quad Q''(a)=\gamma_1$$

Entonces

$$Q(x) = x(a-x) \left[ \frac{\gamma_1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \frac{\beta_1}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right) \right],$$

$$Q'(0) = \frac{a}{2} \gamma_1 + 2 \beta_1 \quad (18.1)$$

$$-Q''(0) = 2 \gamma_1 + \frac{6}{a} \beta_1 \quad (18.2)$$

Por tanto, si  $a > 0$ ,  $\beta_1 > 0$  y  $\gamma_1 \geq 0$  se tiene

$$Q(x) > \frac{\beta_1}{a} x(a-x) > 0 \quad \text{en } (0, a) \quad (18.3)$$

Lema 18.3 Sea  $P$  el polinomio definido por  $P^{iv} = -\delta$  y las mismas condiciones de contorno que  $Q$ . Entonces

$$P(x) = \frac{\delta}{24} x(a-x)^3 + Q(x)$$

$$P'(0) = \frac{\delta}{24} a^3 + Q'(0), \quad -P''(0) = \frac{\delta}{4} a^2 + Q''(0) \quad (18.4)$$

Pasamos al decrecimiento geométrico de  $u'(a_n)$  y  $u''(a_n)$ . Obsérvese que sólo hacemos las tres hipótesis básicas.

Teorema 18.1 En las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3) se tiene

$$|u'(a_{n+1})| < \frac{1}{2} |u'(a_n)|, \quad |u''(a_{n+1})| < \frac{1}{2} |u''(a_n)| \quad (18.5)$$

y  $|u(x)| > |Q(x)|$  en  $(a_n, a_{n+1})$

donde  $Q$  es el polinomio de tercer grado indicado en el párrafo siguiente.

Podemos suponer  $u > 0$  en  $(a_n, a_{n+1})$ . Trasladamos el origen al punto  $a_n$  y ponemos

$$a = a_{n+1} - a_n, \quad u'(a_n) = \beta_0, \quad u''(a_n) = -\gamma_0, \quad u'(a_{n+1}) = -\beta_1, \quad u''(a_{n+1}) = \gamma_1 \quad (18.5)$$

Por ser  $u > 0$  es  $\beta_0, \beta_1 > 0$ . Por el teorema 17.1 es  $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ .

(Esta condición de signos es esencial en esta demostración).

Tomemos  $Q$  del lema 18.2 y  $f = u - Q$ . Entonces  $f$  verifica el lema 18.1, de donde  $u(x) - Q(x) > 0$ ,  $f'(0) > 0$  y  $f''(0) < 0$ .

De  $f'(0) > 0$  y (18.1) resulta

$$\beta_0 > \frac{a}{2} \gamma_1 + 2\beta_1 \quad \text{y por tanto} \quad \beta_0 > 2\beta_1$$

De  $f''(0) < 0$  y (18.2) resulta

$$2\gamma_1 + \frac{6}{a} \beta_1 < \gamma_0 \quad \text{y por tanto} \quad 2\gamma_1 < \gamma_0 \quad \text{Q.E.D.}$$

#### Nota 18.1 Otros principios de comparación

##### a) Problema de Dirichlet para el operador $\Delta^2$

(Físicamente representa placas y barras empotradas). En dimensión uno, el correspondiente principio de comparación ( $\Delta^2 u \geq 0$  implica  $u \geq 0$ ) puede demostrarse como el lema 18.1 o por el método de la nota siguiente. Mediante un tercer método, Bidaut-Veron [3] lo demostró en dimensión  $N$  con simetría esférica. Sin embargo, en dimensión  $N$  es, en general, falso, como prueban los contraejemplos de Garabedian [1], pág. 510, y Duffin [1], pág. 1057. Durante mucho tiempo se conjeturó con Hadamard [1] que era cierto, debido a su interpretación en teoría de placas.

##### b) Problema de Riquier para el operador $\Delta^2$

Consiste en dar  $u$  y  $\Delta u$  en la frontera. (Ver p.ej. en Nicolescu [1] la definición general del problema de Riquier). En teoría de barras significa, si las condiciones de contorno son nulas, que la barra está simplemente apoyada. (En teoría de placas, sin embargo, la segunda condición de apoyo simple es más complicada que  $\Delta u = 0$ ). Se verifica trivialmente, en dimensión  $N$ , el correspondiente principio de comparación ( $\Delta^2 u \geq 0$  implica  $u \geq 0$ ) por aplicación repetida del principio del máximo para el laplaciano.

c) Las desusadas condiciones de contorno del lema 18.1 resultan ser las apropiadas para la demostración de compacidad del soporte (sección 19). La razón de ello estriba, en último término, en que el polinomio de tercer grado  $Q$  tiene signo constante en cada arco, además de minorar  $u$ . Por otra parte, en la presente sección se acortan los cálculos, pues trabajando con condiciones de Dirichlet sólo se obtiene la primera relación (18.5), y con condiciones de Riquier sólo la segunda.

Nota 18.2 Principios de comparación y propiedad W de Pólya

El trabajo de Pólya [1] implica fácilmente principios de positividad (en dimensión uno) para un operador diferencial lineal de orden  $m$ ,  $L$ , que cumpla la propiedad W de positividad de los wronskianos parciales, (Ver un resumen y más referencias en Beckenbach-Bellman [1]). En el caso de coeficientes constantes, para que  $L$  cumpla la propiedad W en un intervalo arbitrario es necesario y suficiente que sean reales todas sus raíces características. Por ejemplo, el operador  $u+u^{(m)}$ , pero no el operador  $u+u^{iv}+u$ .

Las condiciones de contorno pueden ser muy variadas (incluso pueden ser condiciones de interpolación), siempre que en cada punto se den derivadas consecutivas empezando con la función. Esto incluye las condiciones de contorno de Dirichlet, pero no las de Riquier.

El trabajo de Pólya da (de manera directa) desigualdades menos estrictas y exige más regularidad que el lema 18.1.

Nota 18.3 Otra demostración del teorema 16.3

El planteamiento es el siguiente :  $u$  tiene infinitos arcos y conocemos ya el lema 16.2, pero no que  $K=0$ . El teorema 17.1 se demuestra, con un poco más de trabajo, sin necesidad de saber que  $K=0$ . (El teorema 18.1 se basa en el 17.1).

Por (18.5)  $\lim u''(a_n) = 0$

Por el teorema 17.1, I  $\liminf u'(a_n) u'''(a_n) \geq 0$

Por tanto de (16.1) resulta

$0 \leq \liminf u'(a_n) u'''(a_n) = K \leq 0$  luego  $K = 0$ .



19. Compacidad del soporte si  $|\Gamma'(s)| \geq c|s|^{r-1}$  con  $0 < r < 2$

En esta sección tratamos el resultado más general sobre compacidad del soporte. En la sección 20 y en la sección 22 damos resultados menos generales con demostraciones más sencillas y breves.

Los principales resultados previos que usamos en todas estas demostraciones son:

- 1) La ecuación de Euler (teorema 16.1).
- 2) La condición de signos  $u'(a_n)u''(a_n) < 0$  que proviene de la ecuación integral del teorema 16.2.
- 3) Las acotaciones geométricas del teorema 18.1, que a su vez se basan en la anterior condición de signos.

(También empleamos el teorema 16.3, aunque en la sección 20 puede obviarse).

Si sólo se desea demostrar la compacidad del soporte, puede suponerse que  $u$  tiene infinitos arcos, pues en caso contrario ya sabemos (teorema 12.1) que el soporte es compacto. (En particular, no es necesario el estudio de la sección 15). Asimismo, recordamos la simplificación explicada en la nota d) pág. 102.

Teorema 19.1 Asumimos las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3). Entonces el soporte de  $u$  es compacto si en un entorno de  $s = 0$

$$|\Gamma'(s)| \geq c|s|^{r-1} \quad \text{c.t.p.}, \quad c > 0, \quad 0 < r < 2 \quad (19.1)$$

La idea principal de la demostración consiste en comparar, en cada arco de  $u$ , la ecuación de Euler  $u^{iv} + \Gamma'(u) + \Delta = 0$  con la ecuación lineal  $y^{iv} + \lambda y = 0$ . Ahora bien, esta comparación requiere un proceso de preparación y una elección cui

dadosa de las condiciones de contorno (nota 18.1,c).

**Teorema 19.2** En las hipótesis del teorema anterior, sea  $(a_n, a_{n+1})$  un arco de  $u$  tal que

1º) La imagen de  $(a_n, a_{n+1})$  por  $u$  está contenida en el entorno de  $s=0$  en que se cumple (19.1)

2º)  $a_{n+1} < a_\infty$  y, por tanto,  $u'(a_{n+1}) \neq 0$ ,

Entonces

$$a_{n+1} - a_n < K_1 |u'(a_n)|^{\frac{2-r}{2+r}} \quad (19.2)$$

donde  $K_1$  depende sólo de  $(r, C)$  y está dada por (8.9).

(En relación con  $K_1$ , véase también la nota a) de la página 120. Por otra parte, obsérvese que la segunda hipótesis excluye el último arco, caso de no haber infinitos arcos).

Este teorema y (18.5) implican el anterior teorema. En efecto,  $\sum (a_{n+1} - a_n) < \infty$  por estar mayorada, desde un  $n$  en adelante, por una progresión geométrica decreciente. (Recordamos que  $u(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow a_\infty$ ).

En particular, para el problema  $\alpha\beta\Gamma$  con  $\alpha=0$  resulta, suponiendo que (19.1) se cumple globalmente

$$a_\infty \leq K_1 \frac{\beta^\sigma}{1 - (1/2)^\sigma}, \quad \sigma = \frac{2-r}{2+r} \quad (19.3)$$

que es una cota en la que sólo intervienen datos del problema.

Pasamos a demostrar el teorema 19.2. Trasladamos el origen al punto  $a_n$  y retomamos las notaciones de la demostración del teorema 18.1. En particular  $a = a_{n+1} - a_n$ .

Llamamos  $G(x,t)$  a la función de Green, cambiada de signo, del operador  $d^4/dx^4$  con las condiciones de contorno del lema 18.1, es decir, las condiciones homogéneas correspondientes a las de (19.4). En virtud del lema 18.1

$$G(x,t) > 0 \quad \text{en} \quad (0,a) \times (0,a)$$

Consideremos el problema de contorno lineal

$$\left. \begin{aligned} y &\in C^4[0,a], \quad \lambda > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \gamma_1 > 0 \\ y^{iv} + \lambda y &= 0 \quad \text{en} \quad (0,a) \\ y(0) = y(a) &= 0, \quad y'(a) = -\beta_1, \quad y''(a) = \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

Insistimos en que  $G$  se refiere al operador  $u \rightarrow u^{iv}$ , mientras que (19.4) se refiere al operador  $u \rightarrow u^{iv} + \lambda u$ . Este último no verifica propiedades de positividad y el problema (19.4) puede no tener solución o tenerla no única. Recordemos que, por el contrario, el principio de comparación del lema 18.1 implica existencia y unicidad para el correspondiente problema de contorno.

Puesto que  $y^{iv} = -\lambda y$ , podemos relacionar el problema (19.4) en  $G$ . En efecto, por superposición lineal  $y(x)$  es solución de (19.4) si y sólo si es solución de la ecuación integral

$$y(x) = Q(x) + \lambda \int_0^a G(x,t)y(t)dt \quad (19.5)$$

donde  $Q$  es el polinomio de tercer grado del lema 18.2. Aquí sólo necesitamos recordar que  $Q > 0$ .

Por la ecuación de Euler, en el arco considerado

$$-u^{iv} = \Gamma'(u) + \Lambda \geq C u^{r-1}$$

Llamémos  $b$  al cero de  $u'$  en dicho arco. Como el máximo de  $u$  en el arco se alcanza en  $b$  y  $r-1 < 1$ , tenemos

$$\left(\frac{u(x)}{u(b)}\right)^{r-1} \geq \frac{u(x)}{u(b)} \quad \text{luego} \quad u(x)^{r-1} \geq \frac{u(x)}{u(b)^{2-r}}$$

y finalmente en  $(0, a)$

$$-u^{iv} \geq \lambda u \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{C}{u(b)^{2-r}} \quad (19.6)$$

Se comprende ahora el interés de los siguientes lemas.

Lema 19.1 Supongamos que existe  $u$  tal que en  $(0, a)$   $u^{iv}$  es una medida,  $u \geq 0$ ,  $u^{iv} + \lambda u \leq 0$  y  $u$  satisface las condiciones de contorno del problema (19.4). Entonces, el problema (19.4) tiene una solución  $y(x)$  que satisface en  $(0, a)$

$$u(x) \geq y(x) > Q(x) > 0$$

(En este lema  $u$  no designa una solución del problema  $\Gamma$ , es decir,  $u$  sólo verifica las hipótesis enunciadas en el lema).

Consideremos  $u_1$  tal que  $-u_1^{iv} = \lambda u$  y que verifica las mismas condiciones de entorno de (19.4). Dada  $u$ , esta  $u_1$  existe, es única y está dada por

$$u_1(x) = Q(x) + \lambda \int_0^a G(x, t) u(t) dt \quad (19.7)$$

Por el lema 18.1 (el cual admite que  $u^{iv}$  sea una medida)

$$u(x) \geq u_1(x)$$

Vamos a construir  $y(x)$  por iteración en (19.5). Ponemos

$$y_1(x) = Q(x)$$

$$y_{n+1}(x) = Q(x) + \lambda \int_0^a G(x,t) y_n(t) dt \quad (19.8)$$

Organizamos la demostración en cuatro pasos. Utilizamos repetidamente que  $Q, G, \lambda$  son estrictamente positivos.

1.  $y_{n+1}(x) > y_n(x)$ . Vamos a verlo por inducción sobre  $n$ . Es evidente que  $y_2 > Q = y_1$ . Supongamos (hipótesis de inducción) que  $y_n > y_{n-1}$ . Entonces

$$y_{n+1} = Q + \lambda \int G y_n > Q + \lambda \int G y_{n-1} = y_n$$

2.  $y_n(x) < u(x)$ . También por inducción. Por (19.7)  $y_1 = Q < u_1 \leq u$ . Supongamos (hipótesis de inducción)  $y_n < u$ . Entonces por (19.7) otra vez

$$y_{n+1} = Q + \lambda \int G y_n < Q + \lambda \int G u = u_1 \leq u$$

3. Por monotonía existe  $y(x) = \lim y_n(x)$  para todo  $x \in (0, a)$ . Además

$$Q(x) < y(x) \leq u(x)$$

y por tanto  $y(x)$  es integrable en  $(0, a)$ . ( $y(x)$  es medible por ser límite puntual de funciones continuas).

4. Por el lema de Levi de convergencia monótona "se puede pasar al límite dentro de la integral" en (19.8), luego  $y(x)$  verifica (19.5), lo que termina la demostración del lema.

Comentamos que, por el lema 18.1, o bien  $u \equiv y$ , o bien  $u > y$  en todos los puntos del intervalo.

Lema 19.2 Si la ecuación  $y^{iv}(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $\lambda > 0$ , tiene una solución estrictamente positiva en  $(0, a)$ , entonces

$$a < 2\pi \frac{\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}}$$

Conviene introducir la notación  $\lambda = 4\mu^4$ ,  $z = \mu x$ . Considerando la solución general

$$A_1 e^z \cos z + A_2 e^z \sin z + A_3 e^{-z} \cos z + A_4 e^{-z} \sin z$$

algunos cálculos dan que dos raíces consecutivas cualesquiera distan menos de  $2\pi$  (en la variable  $z$ ), es decir, que  $\mu a < 2\pi$ . Q.E.D.

Ahora demostramos el teorema 19.2. Por (19.6) y los dos lemas anteriores (volvemos a llamar  $b_n$  a  $b$ )

$$a_{n+1} - a_n = a < 2\pi \frac{\sqrt{2}}{\zeta^{1/4}} u(b_n)^{\frac{2-r}{4}}$$

Dado que (19.1) implica (17.1), aplicando ahora el teorema 17.3 obtenemos (19.2) con

$$K_1 = 2\pi \sqrt{2} \left( \frac{r}{2} \right)^{\frac{2-r}{4(2+r)}} \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{2+r}}} \quad (19.9)$$

Notas:

a) Un estudio más detallado de la ecuación  $y^{iv} + \lambda y = 0$  en la situación de lema 19.1 permite demostrar que en (19.9) se puede poner  $K_0$  en vez de  $2\pi$ , siendo  $K_0$  la primera raíz positiva de la ecuación  $\operatorname{tg} x = \operatorname{th} x$ . Una buena cota superior de  $K_0$  es  $5\pi/4$ . Con siete cifras decimales exactas se tiene

$$K_0 = 3.926\ 602\ 3 \qquad \frac{5}{4} \pi = 3.926\ 990\ 8$$

b) El mismo estudio da que la solución  $y(x)$  del lema 19.1 es única.

c) El último arco hay que excluirlo porque daría  $Q \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$ .

d) Es claro que el teorema 19.2 es válido también para  $r=2$ . Entonces resulta un decrecimiento al menos exponencial de  $u$  en  $\infty$ .

## sección 20

### 20. Compacidad del soporte : mejoras si $0 < r \leq 1$

En el caso  $0 < r \leq 1$  vamos a dar una demostración más simple de (19.2), obtener un valor mejor de la constante y suprimir la limitación  $a_{n+1} < a_\infty$ . Seguimos empleando las mismas condiciones de contorno, aunque ahora servirían también condiciones de Dirichlet, de Riquier u otras (ver notas de la sección 18).

**Teorema 20.1** *Asumimos las hipótesis del teorema 19.2, salvo que ahora  $0 < r \leq 1$  y en cambio puede ser  $a_{n+1} = a_\infty$ . Entonces*

$$a_{n+1} - a_n < K_2 |u'(a_n)|^{\frac{2-r}{2+r}}$$

$$K_2 = 24^{1/3} \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1-r}{3(2+r)}} \frac{1}{C^{\frac{1}{2+r}}}$$

La simplificación estriba en que ahora vamos a poder utilizar directamente el principio de comparación (lema 18.1) para el operador  $u + u^{rv}$ .

Tenemos como antes  $-u^{rv} = \Gamma^r(u) + \Delta \geq C u^{r-1}$

Sin embargo, al ser ahora  $r-1 \leq 0$ , la relación

$$u \leq u(b_n) \quad \text{implica} \quad u^{r-1} \geq u(b_n)^{r-1} = \frac{1}{u(b_n)^{1-r}}$$

de modo que tenemos en  $(0, a)$

$$-u^{rv} \geq \delta, \quad \text{con} \quad \delta = \frac{C}{u(b_n)^{1-r}} \quad (20.1)$$

Consideremos el polinomio (de cuarto grado)  $P$  del lema 18.3. Podemos repetir la demostración del teorema 18.1 con  $P$  en vez de  $Q$ , es decir, con  $f = u - P$ . Ahora  $f'(0) > 0$  da

$$\beta_0 > \frac{\delta}{24} a^3 + Q'(0) \quad \text{luego} \quad \beta_0 > \frac{\delta}{24} a^3$$



puesto que  $Q'(0) \geq 0$ . Sustituyendo (18.6) y (20.1) resulta

$$a_{n+1} - a_n < \left(\frac{24}{C}\right)^{1/3} |u(b_n)|^{\frac{1-r}{3}} |u'(a_n)|^{1/3}$$

Notemos que esta relación con (18.5) ya implica la compacidad del soporte, puesto que  $1-r > 0$  y  $|u(b_n)| \leq \sup |u|$ .

(Hasta aquí no se ha empleado el teorema 16.3 ni ninguna de sus consecuencias).

La demostración se termina aplicando el teorema 17.3, el cual sí que se fundamenta en el teorema 16.3.

Nota Un resultado de soporte compacto para otro problema

Consideremos el problema que se obtiene cambiando en el problema  $\Gamma$  el funcional por

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty u''^2 + \frac{B}{2} \int_0^\infty u'^2 + \int_0^\infty \Gamma(u) \quad , \quad B \geq 0$$

(El término en  $u'$  significa físicamente una tensión como la de una cuerda).

Entonces, el soporte de toda solución de este problema es compacto si se cumplen las mismas hipótesis que en el teorema 20.1.

Obsérvese que por ser  $r \leq 1$  la hipótesis (19.1) implica

$$|\Gamma'(s)| \geq C > 0 \quad \text{c.t.p.} \quad (20.2)$$

Para el nuevo problema puede construirse una cadena de teoremas análogos a los vistos en estas páginas y reducir finalmente la demostración de la compacidad del soporte a la del teorema 20.1.

En dicha cadena de teoremas aparece en vez del operador  $u \rightarrow u^{iv}$  el operador más complicado  $u \rightarrow u^{iv} - Bu''$ . Sin embargo, este último sigue verificando la propiedad  $W$  de Pólya (ver nota 18.2) y pueden emplearse los teoremas de Pólya [1] sobre interpolación, ceros y positividad.

La ecuación de Euler es ahora

$$u^{iv} - Bu'' + \Gamma'(u) + \Delta = 0$$

Obtenemos que  $u''(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow a_\infty$  como en el corolario 16.1. Entonces, en los arcos contenidos en un cierto entorno de  $a_\infty$  (supuesto  $u > 0$ )

$$-u^{iv} = \Gamma'(u) + \Delta - Bu'' \geq \Gamma'(u) - \epsilon \geq C - \epsilon > 0$$

de modo que hemos llegado a (20.1) con  $\delta = C - \epsilon$ .

21. Regularidad en el problema  $\Gamma$ Teorema 21.1 Regularidad.

I. Asumiendo sólo las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3), tenemos que  $u'''$  es continua donde  $u' \neq 0$  y

$$u^{iv} \in M(0, a_\infty) \quad , \quad u''' \in L^1(R^+) \quad y \quad u'' \in \text{Abs } C(\bar{R}^+)$$

II. Si además  $\Gamma' \in L^q_{loc}(R - \{0\})$  con  $q > 2$ , entonces

$$u^{iv} \in L^1_{loc}[0, a_\infty) \quad y \quad u'''(x) \text{ es continua para } x \neq a_\infty, x \geq 0$$

III. Si además  $\Gamma' \in L^q_{loc}(R)$  con  $q > 3$ , entonces

$$u^{iv} \in L^1(R^+) \quad y \quad u''' \in \text{Abs } C(\bar{R}^+)$$

IV. Si  $\Gamma$  verifica (1.1) y  $\Gamma \in \text{Lip}_{loc}(R)$ , entonces  $u^{iv} \in L^\infty(\bar{R}^+)$

Notas

a) La hipótesis de III implica que  $u$  tiene infinitos arcos (lema 15.4).

b) Consideremos  $\Gamma(s) = |s|^r$ . La hipótesis de II se cumple para todo  $r > 0$ , puesto que el origen está excluido. Por otra parte,  $q > 3$  de III significa  $r > 2/3$ .

c) Recordamos que la integrabilidad global de  $f'$  implica que  $f$  es globalmente absolutamente continua y globalmente de variación acotada (consecuencia del lema 1.1).

El punto IV es repetición del corolario 6.1.

El punto II está incluido en el teorema 16.1. (El problema que se presenta cuando el origen es un cero de  $u'$  está resuelto en el lema 14.2).

Para demostrar III sólo falta estudiar  $a_\infty$ . Por el lema 15.4  $u$  tiene infinitos arcos y por el lema 5.1, para  $s$  en un compacto:

$$\Gamma(s) \leq Cte |s|^r \quad \text{con} \quad r > 2/3$$

Dado que  $u^{iv}$  tiene signo constante en  $(a_n, a_{n+1})$ , para que  $u^{iv} \in L^1(0, a_\infty)$  es suficiente que

$$\sum_n |u'''(a_{n+1}) - u'''(a_n)| < \infty$$

lo que es cierto, ya que  $|u'''(a_n)|$  está mayorada por una progresión geométrica decreciente en virtud de los teoremas 17.5 y 18.1. El exponente del teorema 17.5 es positivo porque  $r > 2/3$ .

Para obtener que  $u^{iv} \in L^1(\mathbb{R}^+)$  sólo falta saber que  $u''(a_\infty) = 0$ , pero esto resulta de que  $u'''(a_n) \rightarrow 0$ . (Aquí es esencial saber que hay infinitos arcos).

Pasamos a demostrar el punto I. Confrontándolo con el teorema 16.1, el lema 16.1 y el corolario 16.1, vemos que sólo falta demostrar que  $u'''$  es integrable hasta  $a_\infty$  y hasta el origen.

1. Veamos que  $u'''$  es integrable hasta  $a_\infty$ . Como antes, es suficiente que

$$\sum_n |u''(d_{n+1}) - u''(d_n)| < \infty$$

donde se usa la notación del teorema 17.1. (Ver la figura que lo acompaña). Por el teorema 17.2  $|u''(d_n)| < |u''(a_n)|$ , luego por el teorema 18.1 la anterior suma es, en efecto, finita. Insistimos en que aquí no se ha supuesto ninguna acotación de  $\Gamma$  por potencias.

2. Veamos que  $u'''$  es integrable hasta el origen. Existe un entorno a la derecha del origen,  $E$ , en el que  $u' \neq 0$ . Por la ecuación de Euler

$$-u^{iv} = \Gamma'(u) \quad \text{en} \quad E$$

Si  $u'(0) \neq 0$ , vimos en el lema 13.1 que  $\Gamma'(u) \in L^1(E)$  y a fortiori  $u''' \in L^1(E)$ . Si  $u'(0) = 0$  la demostración no está incorporada en lemas anteriores. Como  $u'''$  tiene signo constante en un entorno del origen, es suficiente ver que el

límite  $u''(0^+)$  es finito. Sea  $0 < x < x_0 \in E$  :

$$u''(x) = u''(x_0) + u'''(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t) u^{iv}(t) dt$$

luego es suficiente ver que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{x_0} (t-x) \Gamma'(u(t)) dt < \infty$$

Si  $u''(0^+) = 0$  no hay nada que demostrar. Si  $u''(0^+) \neq 0$ , entonces en un entorno del origen (\*)

$$|u'(t)| \geq Cte \ t$$

Multiplicando y dividiendo por  $|u'|$  y dado que  $0 \leq t-x < t$

$$\int_x^{x_0} \frac{t-x}{|u'(t)|} \Gamma'(u(t)) |u'(t)| dt \leq Cte \int_x^{x_0} \Gamma'(u(t)) |u'(t)| dt$$

y la última integral es  $\Gamma(u(x)) - \Gamma(u(x_0))$  en virtud de la fórmula de cambio de variable. Q.E.D.

#### Notas

a) Sea  $b$  un cero de  $u'$ ,  $b < a_\infty$ . Si  $b \neq 0$ ,  $u'''$  tiene límites laterales finitos en  $b$ , ya que  $u^{iv}$  es una medida sobre  $(0, a_\infty)$ . Si  $b=0$ , el límite  $u'''(0^+)$  existe por monotonía pero puede ser infinito, como muestra el ejemplo de la sección 14-A. En cambio, la hipótesis de II implica que  $u'''(0^+)$  es finito, como ya hemos dicho.

b) Si el soporte no es compacto, estos resultados nos dan propiedades asintóticas en  $\infty$ . Señalamos también las siguientes:

c) Asumiendo sólo las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3) se tiene

$$u'' \in L^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{y} \quad u' \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

La afirmación sobre  $u''$  se demuestra por el método que daba  $u'''$  integrable hasta  $a_\infty$ . Ahora  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$  y  $u'' \in L^1(\mathbb{R}^+)$

(\*) Además  $u'(0)=0$  excluye  $u''(0^+)=0$  como en el lema 16.3.

dan  $u' \in L^2(\mathbb{R}^+)$  por la desigualdad de Nirenberg del lema 5.3.

d) Si además se cumple la hipótesis (17.1) del teorema 17.3, entonces  $u' \in L^1(\mathbb{R}^+)$ . Es consecuencia del propio teorema 17.3 y de (18.5) que dan

$$\sum_n |u(b_{n+1}) - u(b_n)| < \infty$$

22. Compacidad del soporte : otra  
demostración ( $2/3 \leq r \leq 1$ )

Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema 21.1,  
 III (con lo que  $u^{iv} \in L^1$ ) y además

$$|\Gamma'(s)| \geq c \quad \text{c.t.p.}$$

Entonces

$$a_\infty \leq \frac{1}{c} \|u^{iv}\|_1$$

En efecto, resulta de integrar  $|u^{iv}| = |\Gamma'(u)| \geq c$   
 en  $(0, a_\infty)$ .

Analizando la cuestión con detalle, se observa que este  
 tipo de demostración de compacidad del soporte puede hacerse  
 con hipótesis más débiles, a saber

1. Las tres hipótesis básicas (1.1), (1.2) y (1.3).
  2.  $|\Gamma'(s)| \geq c|s|^{r-1} \quad \text{c.t.p.}$
  3.  $\Gamma(s) \leq \frac{\bar{c}}{\bar{r}} |s|^{\bar{r}}$
- $$\left. \begin{array}{l} \text{c.t.p.} \\ \frac{2}{3} \leq \bar{r} \leq r \leq 1 \end{array} \right\} \quad c > 0, \quad \bar{c} > 0$$

Aquí  $\bar{r} \leq r$  no es mas que una condición de compatibilidad  
 entre las dos desigualdades. La hipótesis 3 es más débil que  
 $\Gamma' \in L^q$  porque se hace sobre la función en vez de sobre su de-  
 rivada. Además admitimos el valor  $2/3$ .

Veamos la demostración. Como siempre, basta considerar el  
 caso de infinitos arcos. En el arco  $(a_n, a_{n+1})$

$$|u^{iv}| \geq |\Gamma'(u)| \geq c|u|^{r-1} = \frac{c}{|u|^{1-r}}$$

$$1 \leq \frac{1}{c} |u|^{1-r} |u^{iv}| \leq \frac{1}{c} |u(b_n)|^{1-r} |u^{iv}|$$

Integrando resulta

$$a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{c} |u(b_n)|^{1-r} |u'''(a_{n+1}) - u'''(a_n)|$$

El primer factor está acotado. El segundo está mayorado por una progresión geométrica decreciente, por los teoremas 17.5 y 18.1, supuesto  $\bar{r} > 2/3$ . Para  $\bar{r} = 2/3$  el segundo factor está acotado y para el primero se recurre al teorema 17.3. Q.E.D.

La forma explícita de las cotas es complicada debido a que tenemos dos exponentes:  $r$ ,  $\bar{r}$ .

En resumen, la demostración de esta sección se fundamenta en las cotas geométricas del teorema 18.1 y del teorema 17.5. Es menos general y algo más complicada (en cuanto a los resultados previos necesarios) que la dada en la sección 20. Su interés radica en el estudio de otros problemas de contorno y del cálculo de variaciones.

Nota Simplificación si  $\Gamma$  es Lip y  $|\Gamma'(s)| \geq C$ .

(Obsérvese que hemos puesto  $r=1$  y que  $\Gamma$  Lip implica  $\bar{r}=1$ ).

Si  $\Gamma$  es Lip y definida positiva (1.1), puede llegarse a unas cotas geométricas como las del teorema 17.5 mucho más rápidamente. En efecto, ahora  $u^{iv} \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$  y por el teorema 17.2

$$\|u'\|_{L^\infty(a_n, \infty)} = |u'(a_n)|$$

Aplicando el lema 5.3 con normas  $L^\infty$

$$|u'''(a_n)| \leq \|u'''\|_{L^\infty(a_n, \infty)} \leq \text{cte} \|u^{iv}\|_{L^\infty(a_n, \infty)}^{2/3} \|u'\|_{L^\infty(a_n, \infty)}^{1/3}$$

$$\leq \text{cte} \|u^{iv}\|_{L^\infty}^{2/3} |u'(a_n)|^{1/3}$$

que es el resultado anunciado. La demostración de compacidad del soporte se realiza ahora como antes empleando la hipótesis  $|\Gamma'(s)| \geq C$ .

Recordamos (lema 6.1) que  $\|u^{iv}\|_{L^\infty} \leq K$  si  $K$  es una constante de Lipschitz global de  $\Gamma$ .





## PARTE VI

EL PROBLEMA  $r$ -POTENCIAL : COMPLEMENTOS

En esta parte combinamos el método de semejanza, los métodos de las partes IV y V y propiedades de continuidad en los parámetros  $(\alpha, \beta, r)$  .

Recordamos que el problema  $r$ -potencial verifica, para todo  $r > 0$  , las tres hipótesis básicas (1.1), (1.2) y (1.3) , pág. 12 .



sección 23-A

23. Aplicaciones de la parte V al problema r-potencial

23-A Fórmula del mínimo y reducción a un problema de Cauchy

Teorema 23.1 Sea cualquier  $(\alpha, \beta)$  y cualquier  $r > 0$ .

Si  $u$  es una solución del problema  $\alpha\beta r$ , entonces

$$(2 + 3r) M(\alpha, \beta) = 4\alpha u'''(0) - (2 + r)\beta u''(0) \quad (23.1)$$

Tenemos  $\Gamma(s) = \frac{C}{r} |s|^r$  y  $\Gamma'(s) = C|s|^{r-1} \operatorname{sgn} s$

(Es de notar que en (23.1) no aparece explícitamente la constante C).

El teorema resulta de operaciones elementales con las ecuaciones del teorema 16.2, I y del teorema 16.3, II. La clave está en que ahora  $\Gamma(u)$  y  $u\Gamma'(u)$  son proporcionales. (Ya dijimos que  $\Delta_1$  es cero para el problema r-potencial).

Conviene subrayar que el valor del mínimo,  $M(\alpha, \beta)$ , es único aunque la solución del problema  $\alpha\beta r$  no sea única.

Vamos a ver como reducimos nuestro problema  $\alpha\beta r$  a un problema de valor inicial de Cauchy, suponiendo  $\beta \geq 0$ . (Recordamos el convenio de signos:  $\alpha \geq 0$  siempre y  $\beta > 0$  si  $\alpha = 0$ ).

Del teorema 16.3, I:

$$\beta u'''(0) - \frac{1}{2} u''(0)^2 + \frac{C}{r} \alpha^r = 0 \quad (23.2)$$

Consideremos (23.1) y (23.2) como un sistema con incógnitas  $u''(0)$  y  $u'''(0)$ . Si  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  tenemos una parábola y una recta que se cortan en dos puntos. En uno de ellos  $u''(0)$  es positiva, luego podemos excluirlo por el teorema 17.1 (ver también la figura que lo acompaña). Por tanto  $u''(0)$  y  $u'''(0)$  se expresan unívocamente mediante  $M(\alpha, \beta)$ . (Los casos  $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$  son inmediatos).

Desde luego, se puede dar explícitamente  $u''(0)$  y  $u'''(0)$  mediante la fórmula de la ecuación de segundo grado. En el caso del problema  $(\alpha=0, \beta=1)$  tenemos las sencillas fórmulas

$$u''(0) = -\frac{2+3r}{2+r} M(0,1) \quad u'''(0) = \frac{1}{2} u''(0)^2 \quad (23.3)$$

#### Notas

a) Si  $\beta < 0$ , resultan a lo más dos vectores de datos de Cauchy, uno por cada punto de corte de la parábola y la recta, pero ya no podemos excluir uno de ellos por el anterior argumento sobre signos. Puede demostrarse que, si  $u$  tiene infinitos arcos, el valor correcto de  $u''(0)$  es siempre el menor de los dos.

b) Al haber llegado a un problema de Cauchy, disponemos de una nueva forma de tratar la unicidad del problema  $\alpha\beta r$ . En efecto, el razonamiento del lema 7.1 nos da que la solución es única si  $\beta \geq 0$  y que en cualquier caso hay a lo más dos soluciones.

#### 23-B Cotas de las razones de semejanza y monotonía de otras funciones auxiliares

Teorema 23.2 Sea  $r > 1$  y  $u$  solución del problema  $\alpha\beta r$ . Con la notación del teorema 17.1 se tiene

$$|u'''(b_{n+1})| < \frac{1}{2} |u'''(b_n)| \quad (23.4)$$

Podemos suponer  $u' > 0$  en  $(b_n, b_{n+1})$ . Derivando la ecuación de Euler se obtiene:

$$u'' = -C(r-1) |u|^{r-2} u' \quad (23.5)$$

luego  $u''$  tiene el signo contrario al de  $u'$ . Notemos que, por ser  $r > 1$ ,  $|u|^{r-2}$  es una función integrable (ya que  $u'$  no se anula donde se anula  $u$ ) y la distribución  $u''$  también es una

función y está dada por la anterior fórmula en  $(b_n, b_{n+1})$ .

Ahora  $u'$  está en la misma situación que  $u$  en la demostración del teorema 18.1. Los signos se comprueban con el teorema 17.1. Por tanto la segunda de las (18.5) es ahora (23.4). Q.E.D.

#### Notas

a) Si  $r < 1$  la distribución  $u''$  no tiene signo constante en  $(b_n, b_{n+1})$  y la demostración anterior no es válida. De hecho, sabemos por la fórmula (10.4) que para  $r=2/3$  (es decir,  $m=3$ )  $|u'''(b_{n+1})| = |u'''(b_n)|$ .

b) Para  $r=1$  los argumentos de continuidad respecto a  $r$  de la sección 24 nos dan (23.4) con  $\leq$  en vez de  $<$ . Esta observación se aplica también en los resultados que siguen.

**Teorema 23.3** Sean  $\lambda, \mu$  las razones de semejanza del teorema 9.4. Entonces :

$$\mu = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{4}{2-r}} \begin{cases} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{r}} & \text{si } 0 < r < 1 \\ < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3r-2}} & \text{si } 1 \leq r < 2 \\ < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{2+r}} & \text{si } r > 2 \end{cases}$$

**Nota** Por cálculo explícito tenemos :

$$\text{para } r=2 \quad \lambda=1 \quad \mu = e^{-\pi} \approx 0.04 \ 32 \ 139$$

$$\text{para } r=1 \quad \frac{1}{\lambda} = 0.24 \ 21 \ 214 \quad \mu = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 = 0.00 \ 34 \ 366$$

El cálculo de  $\lambda$  para  $r=1$  está ya en Berkovitz-Pollard [2]; para  $r=2$  es elemental (véase la pág. 14).

Haciendo números se comprueba que las cotas del teorema no son cuantitativamente buenas para  $r=1$  y  $r=2$ . El interés del teorema es cualitativo y asintótico (para  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ ).

De hecho, vamos a ver que la primera y tercera desigualdad son válidas para todo  $r > 0$  y la segunda para todo  $r > 1$ , pero hemos indicado en cada intervalo la cota mejor.

Resultan de (10.4) junto con (18.5) o (23.4). La primera se obtiene al considerar  $u''$ , la segunda  $u'''$  y la tercera  $u'$ . Aquí hemos preferido expresar  $m=4/(2-r)$  mediante  $r$ .

Vamos a convenir en definir  $\mu=1/\lambda=0$  cuando  $U$  tiene un número finito de arcos. Así la fórmula (9.6) se conserva también en este caso. Obsérvese que los exponentes de (9.6) no tienen ninguna singularidad para  $r=0$ , puesto que  $m \rightarrow 2$  cuando  $r \rightarrow 0$ .

Corolario 23.1 Cuando  $r \rightarrow 0^+$

$$\mu \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\lambda} \rightarrow 0 \quad U'(A_1) \rightarrow 0$$

Más adelante (nota 26.1), veremos que  $\mu$  y  $1/\lambda$  tienden a cero cuando  $r \rightarrow \delta_1^+$ , siendo  $0 < \delta_1 < 2/3$ , es decir, ya "antes" de que  $r \rightarrow 0^+$ .

Para  $r > 1$  se tienen más propiedades del tipo del teorema 16.2. La más interesante es la siguiente.

Teorema 23.4 Sea  $r > 1$  y  $u$  solución del problema  $\alpha\beta$ . Entonces en  $(0, a_\infty)$  la función

$$\Psi(x) = \frac{r}{2} u'''(x)^2 - u'' u^{iv}$$

es estrictamente positiva y estrictamente decreciente y  $\Psi(a_\infty^-) = 0$ .

Que  $\Psi(a_\infty^-) = 0$  es inmediata de la ecuación de Euler y el corolario 6.1. Teniendo en cuenta (23.5)

$$\Psi' = -C(r-1) |u|^{r-2} (u u''' - u' u'')$$

que es negativa, por el teorema 16.2, donde  $u \neq 0$ . Q.E.D.

Notemos que para  $r \leq 1$  la distribución  $\Psi'$  no es una función en el entorno de cada  $a_n$ . Para  $r=1$ ,  $\Psi$  es constante a trozos y no-creciente.

Ahora razonando como en el teorema 17.2, I resulta el siguiente:

Corolario 23.2 ( $r > 1$ )

$$|u'''(a_n)| > |u'''(b_n)| > |u'''(c_n)| > |u'''(a_{n+1})|$$

Nota Los mismos métodos dan que la función

$$\xi(x) = \frac{4}{3r+2} \left[ \frac{r+6}{8} u'^2 - u u'' \right]$$

posee para  $r > 1$  la sorprendente propiedad de que  $\xi$ ,  $-\xi'$ ,  $\xi''$ ,  $-\xi'''$  y  $\xi^{iv}$  son todas positivas. (Para otros valores del coeficiente que multiplica  $u'^2$  ya no es cierto). Encontramos la función  $\xi$  multiplicando la ecuación de Euler por  $u''$  e integrando por partes. Sus propiedades provienen, en último término, de que  $\Gamma''(s) \geq 0$ , y por ello  $u' u'' \leq 0$  (ver la fórmula (23.5)). En particular, se tiene

$$\xi'' = \frac{C}{r} |u|^r + \frac{1}{2} u''^2 = u''^2 - u' u'''$$

$$\xi^{iv} = u'''^2 + (-u' u'')' = u'''^2 + C(r-1) |u|^{r-2} u'^2$$

Finalmente, comentamos que para  $0 < r < 1$  sólo son positivas  $\xi$ ,  $-\xi'$  y  $\xi''$ .



#### 24. Continuidad en los parámetros $\alpha, \beta, r$

La dependencia continua de los parámetros  $\alpha, \beta, r$  tiene interés por sí misma y, además, la aplicaremos (en especial para  $r \leq 2/3$ ) al estudio de la unicidad de solución y de la infinitud del número de arcos.

En esta sección damos un teorema de continuidad en  $(\alpha, \beta, r)$ . En la nota 26.1 pueden verse otros resultados de continuidad en  $r$  para  $\alpha, \beta$  fijos. En la sección 25 explicamos que la continuidad en  $r$  se extiende "hasta  $r = 0$ ".

Escribiremos la dependencia en los parámetros en la forma

$$M(\alpha, \beta, r) \quad u(x, \alpha, \beta, r) \quad u'(x, \alpha, \beta, r) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

No escribimos la constante  $C$ , pues la mantendremos fija *siempre*.

Sea  $\{(\alpha_n, \beta_n, r_n)\}$  cualquier sucesión con límite

$(\alpha_0, \beta_0, r_0)$ ,  $r_0 > 0$ . Ponemos

$$M_n = M(\alpha_n, \beta_n, r_n) \quad u_n(x) = u(x, \alpha_n, \beta_n, r_n)$$

$$J_n(v) = \frac{1}{2} \int_0^\infty v''^2 + \frac{C}{r_n} \int_0^\infty |v|^{r_n}$$

Por tanto  $M_n = J_n(u_n)$

En las demostraciones pondremos -para abreviar- iguales a uno los dos coeficientes de las integrales de  $J$ .

Teorema 24.1 Con las anteriores notaciones:

I.  $M(\alpha, \beta, r)$  es continua en  $(\alpha, \beta, r)$  para todo  $(\alpha, \beta)$  y todo  $r > 0$ .

II. Existe una subsucesión (que designamos igual) tal que para alguna solución  $u_0$  del problema  $\alpha_0, \beta_0, r_0$  se tiene

$$u_n \rightarrow u_0 \quad \text{y} \quad u'_n \rightarrow u'_0 \quad \text{uniformemente en cada compacto}$$

$$u''_n \rightarrow u''_0 \quad \text{fuertemente en } L^2(R^+)$$

III.  $u(x, \alpha, \beta, r)$  y  $u'(x, \alpha, \beta, r)$  son continuas en  $(x, \alpha, \beta, r)$  en todo punto de  $R^4$  tal que  $x \geq 0$ ,  $r > 0$  y el problema  $\alpha \beta r$  tenga solución única.

Primeramente damos un lema preparatorio.

Lema 24.1 Existe una sucesión  $\{\phi_n\}$  tal que

1º)  $\phi_n'' \in L^\infty(R^+)$  y  $\phi_n$  es de soporte compacto contenido en un acotado independiente de  $n$ .

2º)  $\phi_n(0) = \alpha_n - \alpha_0$  y  $\phi_n'(0) = \beta_n - \beta_0$

3º)  $\phi_n, \phi_n'$  y  $\phi_n''$  tienden a cero uniformemente en  $R^+$ .

En efecto, puede tomarse  $\phi_n$  igual a cero en  $[1, \infty)$  e igual en  $[0, 1]$  al polinomio de tercer grado,  $P_n$ , que cumple 2º) y  $P_n(1) = P_n'(1) = 0$ .

Pasamos a dar la demostración del teorema, organizada en cuatro pasos. La sucesión  $\{\phi_n\}$  solo interviene en el primer paso.

1º paso Vamos a ver que

$$\limsup J_n(u_n) \leq M_0 = J_0(u_0) \quad (24.1)$$

lo que implica que para alguna constante independiente de  $n$

$$\int_0^\infty u_n''^2 \leq Cte, \quad \int_0^\infty |u_n|^{r_n} \leq Cte \quad (24.2)$$

Dado que  $u_0 + \phi_n$  verifica las condiciones de contorno  $(\alpha_n, \beta_n)$ , por definición de mínimo

$$M_n = J_n(u_n) \leq J_n(u_0 + \phi_n) = \int_0^\infty (u_0'' + \phi_n'')^2 + \int_0^\infty |u_0 + \phi_n|^{r_n} \quad (24.3)$$

Demostremos que

$$\lim J_n(u_0 + \phi_n) = \int_0^\infty u_0''^2 + \int_0^\infty |u_0|^{r_0} = J_0(u_0) = M_0 \quad (24.4)$$

El paso al límite en la primera integral no presenta problema, pues tenemos convergencia uniforme en un acotado independiente de  $n$ . Lo mismo ocurre con la segunda integral si  $r_0 < 2$ , pues entonces  $u_0$  tiene soporte compacto. Veamos el paso al límite en la segunda integral cuando  $r_0 > 2$ . Sólo hay que considerar un entorno de  $\infty$ . Por el corolario 10.2

$$|u_0(x)| \leq \text{Cte } (\bar{a} + x)^{-\frac{4}{r_0-2}}$$

Desde un cierto  $n$  en adelante  $r_n \geq r_0 - \varepsilon > 0$ , luego

$$|u_0(x)|^{r_n} \leq \text{Cte } (\bar{a} + x)^{-\frac{4(r_0-\varepsilon)}{r_0-2}}$$

donde el segundo miembro ya no depende de  $n$  y es integrable para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (nótese que  $4r_0/(r_0-2) > 1$  para  $r_0 > 2$ ), luego el deseado paso al límite es legítimo por el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada. (Si  $r_0 = 2$  tenemos una cota exponencial). Con esto queda probado (24.4). Ahora (24.1) es consecuencia de (24.3) y (24.4).

2º paso Vamos a ver el punto I y que para una subsecuencia y una  $u_0$

$$u_n'' \rightharpoonup u_0'' \text{ débilmente en } L^2(\mathbb{R}^+) \quad (24.5)$$

$$u_n(x) \rightarrow u_0(x) \text{ puntualmente para todo } x \geq 0 \quad (24.6)$$

Este paso es muy parecido al teorema 4.1 (de existencia), por lo que seremos muy escuetos. Por (24.2) y compacidad débil de  $L^2$ , extraemos una subsecuencia tal que  $u_n''$  converge débilmente hacia un  $w$  de  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Llamemos  $v$  a la segunda primitiva de  $w$  tal que  $v(0) = \alpha_0$  y  $v'(0) = \beta_0$ . Para cada  $x \geq 0$  tenemos por convergencia débil

$$u_n(x) = \alpha_n + \beta_n x + \int_0^x (x-t) u_n''(t) dt \rightarrow \alpha_0 + \beta_0 x + \int_0^x (x-t) w(t) dt = v(x)$$

Usando sucesivamente la semicontinuidad inferior débil de la norma  $L^2$ , el lema de Fatou (recuérdese (24.2)) y (24.1) se obtiene

$$J_0(v) = \int_0^\infty v''^2 + \int_0^\infty |v|^{r_0} \leq \liminf \int_0^\infty u_n''^2 + \liminf \int_0^\infty |u_n|^{r_n} \\ \leq \liminf J_n(u_n) \leq M_0.$$

Dado que  $v$  pertenece a la clase de minimización del problema  $\alpha_0 \beta_0 r_0$ , todas estas desigualdades son de hecho igualdades, así que  $v$  es una solución del problema  $\alpha_0 \beta_0 r_0$  (lo que prueba (24.5) y (24.6)) y  $M_n \rightarrow M_0$  a lo largo de la subsucesión considerada.

Ahora bien, como el valor del mínimo  $M_0$  es único, toda subsucesión convergente de  $\{M_n\}$  converge hacia  $M_0$ , por lo que  $M_n \rightarrow M_0$  a lo largo de la sucesión inicial toda entera. Esto prueba que  $M(\alpha, \beta, r)$  es continua en  $(\alpha_0, \beta_0, r_0)$ .

3<sup>er</sup> paso Demostración del punto II. Es repetición de la del teorema 4.2.

4<sup>o</sup> paso Veamos el punto III. Sea  $(\alpha_0, \beta_0, r_0)$  tal que el problema  $\alpha_0 \beta_0 r_0$  tenga solución única, es decir,  $u_0$  es única. Entonces en el punto II tenemos convergencia de las sucesiones sin extracción alguna, puesto que toda subsucesión convergente de  $\{u_n\}$  converge hacia  $u_0$ . Para probar el punto III tenemos que ver que

$$(x_n, \alpha_n, \beta_n, r_n) \rightarrow (x_0, \alpha_0, \beta_0, r_0) \text{ implica } u_n(x_n) \rightarrow u_0(x_0)$$

Escribiendo  $x_n = x_0 + \delta_n$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 u_n(x_n) - \alpha_n - \beta_n x_n &= \int_0^{x_n} (x_n - t) u_n''(t) dt = \\
 &= \int_0^{x_0} (x_0 - t) u_n''(t) dt + \delta_n \int_0^{x_0} u_n''(t) dt + \int_{x_0}^{x_0 + \delta_n} (x_0 + \delta_n - t) u_n''(t) dt
 \end{aligned}$$

La segunda y la tercera integral tienden a cero por (24.2) y la desigualdad de Schwarz. En cuanto a la primera integral, usando que  $u_n'' \rightarrow u_0''$  en  $L^2$  (aquí es suficiente la convergencia débil) :

$$u_n(x_n) \rightarrow \alpha_0 + \beta_0 x_0 + \int_0^{x_0} (x_0 - t) u_0''(t) dt = u_0(x_0)$$

que es lo que queríamos demostrar. (La continuidad de  $u'$  se prueba de la misma forma).

sección 25-A

25. El problema límite cuando  $r \rightarrow 0$

25-A Propiedades generales

En esta sección, así como siempre que esté involucrado el paso al límite cuando  $r \rightarrow 0$ , fijaremos la constante del problema  $\alpha\beta r$  poniendo

$$\Gamma(s) = |s|^r$$

Atención: esto significa hacer  $C = r$  (no  $C = 1$ ) en la notación usada en este trabajo. En particular, la ecuación de Euler es

$$u^{iv} = -r|u|^{r-1} \operatorname{sgn} u$$

Definimos el problema  $\alpha\beta 0$  como el problema  $\alpha\beta r$  con

$$\Gamma(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \neq 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases} \quad (25.1)$$

Vamos a resumir el estudio del problema  $\alpha\beta 0$  en la siguiente cadena de observaciones y resultados.

1. La función (25.1) es inferiormente semicontinua, por lo que es aplicable el teorema 4.1 de existencia.
2. El soporte de  $u$  es compacto. En efecto, por un lado el conjunto  $\{u \neq 0\}$  ha de ser de medida finita para que sea finita la integral de  $\Gamma(u)$ . Por otro lado, el soporte es un intervalo por el teorema 5.2.
3. La ecuación de Euler es

$$u^{iv} = 0 \quad \text{en} \quad (0, a_\infty) \quad (25.2)$$

Esto es cierto incluso en los ceros aislados de  $u$ . En efecto, en estos ceros es  $u' \neq 0$ . Con la notación de la sección 13, por (13.2) resulta que la función  $f(\lambda)$  de (13.1) es independiente de  $\lambda^{(u)}$ , luego  $f'(\lambda) \equiv 0$ .

4. El teorema 24.1 de continuidad en los parámetros es válido con  $r \geq 0$  en vez de  $r > 0$ :

Basta seguir paso a paso la demostración con  $r_n \rightarrow 0^+$ . Obsérvese que (25.1) es el límite puntual de  $|s|^r$  cuando  $r \rightarrow 0^+$ .

(\*) ya que, para cada  $\lambda$ ,  $\Gamma(u(x) + \lambda\phi(x)) = 1$  salvo en un punto.

5. Se tiene que independientemente de  $\alpha, \beta$

$$|u''(a_\infty)| = \sqrt{2} \quad (25.3)$$

Este resultado está sugerido por la ecuación del teorema 16.3

$$u'u''' - \frac{1}{2} u''^2 + 1 = 0 \quad \text{en} \quad (0, a_\infty) \quad (25.4)$$

Multiplicando (25.2) por  $u'$  es integrando se obtiene (25.4), salvo una constante de integración a determinar. Demostrar que la constante de integración es la escrita en (25.4) equivale a demostrar (25.3), lo que haremos más abajo, al calcular  $u$  explícitamente.

6. También se conservan los teoremas 9.2 y 9.3 y el lema 8.5, poniendo en ellos  $m=2$ , que corresponde a  $r=0$ . En particular, la función del lema 8.5 es

$$\frac{u'}{u^{1/2}} \quad (25.5)$$

7. Se tiene que independientemente de  $\alpha, \beta$

$$\lim_{x \rightarrow a_\infty^-} \frac{|u'(x)|}{|u(x)|^{1/2}} = 8^{1/4} \quad (25.6)$$

Es consecuencia de (25.3).

#### 25-B Solución explícita del problema $\alpha\beta 0$

Primeramente describimos la solución.

Por comodidad de escritura ponemos

$$z = a_\infty$$

La solución en  $[0, z]$  es

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= -\Lambda \left(1 - \frac{x}{z}\right)^2 + B \left(1 - \frac{x}{z}\right)^3 \\ \Lambda &= -\beta z - 3\alpha & B &= \Lambda + \alpha \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

donde  $z$  viene dado por

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} \ z &= \beta + \sqrt{\beta^2 + \sqrt{72} \ \alpha} & \text{si} & \quad \frac{\beta}{\alpha^{1/2}} > -96^{1/4} \\ \sqrt{2} \ z &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \sqrt{72} \ \alpha} & \text{si} & \quad \frac{\beta}{\alpha^{1/2}} < -96^{1/4} \end{aligned} \right\} \quad (25.8)$$

y en estos casos la solución es única.

Si  $\beta / \alpha^{1/2} = -96^{1/4}$  hay dos y sólo dos soluciones dadas por las dos fórmulas de  $z$  (25.8).

(Comentamos que los casos  $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$ , ambos incluidos en la primera de (25.8), son de resolución mucho más fácil).

Pasamos a explicar cómo se obtiene lo anterior.

Las fórmulas (25.7) resultan de (25.2) mediante cálculos elementales. Entonces

$$u''(a_\infty^-) = -\frac{2\Lambda}{z^2} = \frac{2(\beta z + 3\alpha)}{z^2} \quad (25.9)$$

$$M(\alpha, \beta) = J(u) = z + \frac{1}{2} \int_0^z u''^2 = z + \frac{2\beta^2}{z} + \frac{6\alpha\beta}{z^2} + \frac{6\alpha^2}{z^3} \quad (25.10)$$

El problema se termina minimizando esta expresión respecto de  $z$ .

La clave para obtener  $z$  explícitamente es darse cuenta de que la derivada de (25.10) respecto a  $z$  puede escribirse

$$1 - \frac{2}{z^4} (\beta z + 3\alpha)^2$$



por lo que en los extremos locales de (25.10) respecto a  $z$  se verifica

$$\frac{\beta z + 3\alpha}{z^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (25.11)$$

Esta fórmula junto con (25.9) nos da (25.3). Por otra parte también nos da (25.8), de la siguiente forma:

1. Para  $\beta/\alpha^{1/2} > -72^{1/4}$ , (25.11) tiene sólo una solución positiva.

2. Para  $\beta/\alpha^{1/2} < -72^{1/4}$ , (25.11) tiene tres soluciones positivas, de las cuales sólo las dos de (25.8) dan mínimos locales. Se termina el cálculo comparando cuidadosamente los valores de los dos mínimos locales, que resultan coincidir sólo si  $\beta/\alpha^{1/2} = -96^{1/4}$ .

El primer caso de (25.8) corresponde al signo + en (25.11), luego por (25.9)  $\Lambda < 0$  y entonces (25.7) implica  $u > 0$  en  $(0, z)$ . Por tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 25.1 Sea el problema  $\alpha\beta 0$ . Si  $\beta/\alpha^{1/2} > -96^{1/4}$  entonces  $u \geq 0$  en  $R^+$  y, por tanto,  $a_1 = a_\infty$ .

Nota. El problema  $r=0$  verifica el teorema 28.1, I (pág. 157) con

$$m K^{1/m} = 8^{1/4}, \quad \rho^* = -96^{1/4}$$

Ver especialmente (25.6) y (25.8).

## 26 Un arco o infinitos arcos

Debido al teorema 9.5 (de alternativa entre infinitos arcos y "menos de dos arcos"), es suficiente estudiar la infinitud del número de arcos de  $U$ , solución del problema  $\alpha\beta r$  con  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ . (Sabemos por el teorema 9.1 que  $U$  es única para todo  $r > 0$ ). El caso de un número finito de arcos puede caracterizarse por  $U \geq 0$  en  $\mathbb{R}^+$ , o por « $U$  tiene un solo arco», o por  $A_1 = A_\infty$ . Consecuentemente, el caso de infinitos arcos se caracteriza porque  $U$  toma valores negativos.

### Teorema 26.1

- I.  $U$  tiene infinitos arcos para todo  $r > \frac{2}{3} - \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ .  
 II.  $U$  tiene un solo arco para  $r$  en un entorno a la derecha de cero.

En la sección 29 veremos que

$$\frac{2}{3} - \varepsilon_0 < 0.625$$

Por el lema 15.4 sabemos que  $U$  tiene infinitos arcos para  $r > 2/3$ . La demostración del punto I se basa, en esencia, en pasar de  $r > 2/3$  a  $r > (2/3) - \varepsilon_0$  por continuidad en el parámetro  $r$ , (\*)

Lema 26.1 El conjunto de los valores de  $r > 0$  tales que  $U$  tiene infinitos arcos es un conjunto abierto.

Por el teorema 24.1 la función  $U(x, r)$  es continua. Si  $U$  tiene infinitos arcos para  $r = r_0$ , entonces para algún  $x_0$  es  $U(x_0, r_0) < 0$ , luego sigue siendo  $U < 0$  en un entorno de  $(x_0, r_0)$  que proyecta un entorno de  $r_0$ . Luego  $U$  tiene infinitos arcos en un entorno de  $r_0$ . Q.E.D.

Vamos a ver un lema de convergencia de las derivadas terceras. Sea  $\{r_n\}$  una sucesión con límite  $r_0 > 0$ . Ponemos

$$U_n(x) = U(x, r_n)$$

(\*) En la nota de la pág. 171 se da otra demostración de que  $u$  tiene infinitos arcos si  $r \geq 2/3$ .

Lema 26.2 Existe una subsucesión de la anterior tal que

$$U_n'''(x) \rightarrow U_0'''(x) \text{ puntualmente c.t.p. en } (0, A_1(r_0))$$

donde  $A_1(r_0)$  es el primer cero positivo de  $U_0$ .

Por el teorema 24.1,  $U_n'' \rightarrow U_0''$  fuertemente en  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Por tanto existe una subsucesión tal que  $U_n''(x) \rightarrow U_0''(x)$  puntualmente c.t.p.. Consideremos la ecuación de tercer orden del teorema 16.3 con  $C=r$

$$U'U''' - \frac{1}{2}U''^2 + |U|^r = 0 \quad \text{en } (0, A_\infty) \quad (26.1)$$

$U_0$  verifica esta ecuación en  $(0, A_1(r_0))$ . Como  $U_n \rightarrow U_0$  uniformemente (teorema 24.1), desde un  $n$  en adelante será  $U_n(x) > 0$  en  $[\varepsilon, A_1(r_0) - \varepsilon]$  y  $U_n$  verificará (26.1) en este intervalo. Luego  $U_n'(x)U_n'''(x) \rightarrow U_0'(x)U_0'''(x)$  c.t.p. en este intervalo. Teniendo en cuenta que  $U_0'$  sólo se anula una vez en cada arco, el lema queda demostrado.

Vamos a ver que  $U$  tiene infinitos arcos para  $r_0 = 2/3$ .

Para  $r > 2/3$  ya sabemos que  $U$  tiene infinitos arcos. Por la fórmula (10.4)

$$\left| U'''(A_{k+1}) \right| = \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{m-3} \left| U'''(A_k) \right|$$

Dado que  $m-3 > 0$  para  $r > 2/3$ , que  $1/\lambda < 1$  y que  $U'''$  tiene sus extremos locales en los puntos  $A_k$ , resulta para  $r > 2/3$

$$\sup_{x \geq 0} |U'''(x)| = U'''(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{2+3r}{2+r} \right)^2 M^2 \quad (26.2)$$

donde se ha usado (23.3). Lo importante aquí es que  $U'''(0)$  es una función continua de  $r$  por serlo  $M$  (teorema 24.1 otra vez).

Sea, pues,  $r_0 = 2/3$  y  $r_n > 2/3$ . Por (26.2)

sección 26

$$|U_n'''(x)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2+3r_n}{2+r_n} \right)^2 M_n^2 \quad \text{para todo } x \geq 0$$

Por el lema 26.2 resulta

$$|U_0'''(x)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2+3r_0}{2+r_0} \right)^2 M_0^2 \quad \text{c.t.p. en } (0, A_1(r_0))$$

Esto prueba que  $U_0$  tiene infinitos arcos, pues sino por el lema 15.3 se tendría

$$U_0'''(x) \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } x \rightarrow A_1(r_0)^-$$

lo que contradice la anterior.

Esto demuestra que  $U$  tiene infinitos arcos para  $r = 2/3$ . Ahora el lema 26.1 nos da el punto I del teorema.

Nota 26.1 Mediante el teorema 24.1, la ecuación de Euler, las fórmulas (23.3), el corolario 10.2 y el teorema 27.1 pueden obtenerse resultados mucho más precisos de continuidad en  $r$ . Señalamos los siguientes, junto con un esbozo de demostración.

1.  $U''(x, r)$  es continua en  $(x, r)$  para  $x \geq 0$ ,  $r > 0$ .

La idea de la demostración es obtener que la norma de  $U_n'''$  en un  $L^p$  reflexivo está acotada independientemente de  $n$ ; por tanto existe una subsucesión de  $U_n'''$  débilmente convergente. A partir de aquí, no hay más que seguir la demostración del teorema 24.1.

2.  $U'''(x, r)$  es continua en  $(x, r)$  para  $0 \leq x < A_\infty(r)$  y  $r \geq 0$ . Resulta de la ecuación de Euler y de la ecuación de tercer order del teorema 16.3.

3.  $A_1(r)$  es continua para  $r \geq 0$  y  $A_\infty(r)$  para  $0 \leq r < 2$ .

4.  $\mu(r)$  y  $\frac{1}{\lambda(r)}$  son continuas para  $r \geq 0$ . En particular,

si  $U$  tiene un solo arco para  $r = r_0$ , entonces

$$\mu(r) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\lambda(r)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow r_0$$

(Recuérdese la fórmula (9.6)).

Nota 26.2 El método de continuidad en  $r$  permite también demostrar que hay infinitos arcos para  $r > 2/3$ . Es decir, da un método de demostración distinto del usado en el lema 15.4. A su vez, el método del lema 15.4 también permite llegar hasta  $r > (2/3) - \epsilon$ , si bien los cálculos se complican considerablemente.

Demostración del punto II del teorema 26.1.

La idea es, en esencia, que por continuidad en  $r$  la función  $U$  para  $r$  pequeño es "parecida" a la función  $U$  para  $r=0$ . Para instrumentar esta idea necesitamos una propiedad que discrimine entre un arco o infinitos arcos y que se conserve al pasar al límite en  $r$ . Esta propiedad va a ser la monotonía de la función auxiliar fundamental del lema 8.5.

Recordamos que el teorema 24.1 de continuidad en los parámetros se extiende hasta  $r=0$  (ver la sección 25, cuya notación mantenemos).

Supongamos (reducción al absurdo) que existe una sucesión  $\{r_n\}$  con  $r_n > 0$ ,  $r_n \rightarrow 0$  tal que  $u_n$  tiene infinitos arcos para todo  $n$ .

Sean  $\alpha, \beta$  tales que  $(\beta < 0)$

$$-96^{1/4} < \frac{\beta}{\alpha^{1/2}} < -8^{1/4} \quad (26.3)$$

Los números  $\alpha, \beta$  se mantienen fijos en lo que sigue. Sea  $u_n$  una solución del problema  $\alpha\beta r_n$ . En particular,  $u_0$  es la solución (única por la sección 25) del problema  $\alpha\beta 0$ . Como  $u_n$  tiene infinitos arcos, se verifica (lema 8.5) que

$$\frac{u_n'(x)}{u_n(x)^{1-\frac{1}{m}}} \text{ es decreciente en } (0, a_1(r_n))$$

Por el teorema 24.1 de continuidad en  $r$ , resulta que

$$\frac{u_0'(x)}{u_0(x)^{1/2}} \text{ es no-creciente en } (0, a_1(0))$$

sección 26

Pero esto contradice (26.3) , pues por (25.6) y el corolario 25.1 se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a_1(0)^-} \frac{u_0'(x)}{u_0(x)^{1/2}} = -8^{1/4}$$

Esta contradicción prueba el punto II del teorema.

27. Estudio del caso en que  $U$  tiene un solo arco ( $r < 2/3$ )

**Teorema 27.1** Sea  $u$  una solución del problema  $\alpha\beta$ . Si  $0 < r < 2/3$  y  $U$  tiene un solo arco, entonces

I. Cuando  $x \rightarrow a_{\infty}^-$  se tienen las siguientes equivalencias

$$\begin{array}{l} u(x) \sim Cte (a_{\infty} - x)^m \\ u'(x) \sim Cte (a_{\infty} - x)^{m-1} \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} u''(x) \sim Cte (a_{\infty} - x)^{m-2} \\ u'''(x) \sim Cte (a_{\infty} - x)^{m-3} \end{array}$$

donde las constantes son no nulas y dependen de  $r$  y  $C$  pero no de  $(\alpha, \beta)$  ni de  $u$ .

II. En particular

$$\lim_{x \rightarrow a_{\infty}^-} \frac{|u(x)|}{(a_{\infty} - x)^m} = K, \quad K = \left[ \frac{C}{m(m-1)(m-2)(3-m)} \right]^{\frac{1}{2-r}} \quad (27.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a_{\infty}^-} \frac{u'(x)}{|u(x)|^{1-\frac{1}{m}} \operatorname{sgn} u(x)} = -m K^{1/m} \quad (27.2)$$

**Notas**

- Recordamos que  $m = 4/(2-r)$ .
- Las constantes correspondientes a las derivadas son las que resultan al "derivar o integrar formalmente" en las equivalencias.
- El último arco de  $u$  puede ser negativo.
- Haciendo  $C = r$  se tiene que

$$m K^{1/m} \rightarrow 8^{1/4} \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow 0$$

como era de esperar por la sección 25.

e). La hipótesis " $U$  tiene un solo arco" implica  $r < 2/3$ , según vimos en la sección anterior.

En la demostración que sigue todos los límites son cuando  $x \rightarrow a_{\infty}^-$ . Por el lema 15.1 y el lema 15.3:

$$\lim u'' = 0, \quad \lim |u'| = \infty \quad (27.3)$$

Recordamos que para  $0 < r < 2/3$

$$m-2 > 0, \quad m-3 < 0 \quad (27.4)$$

En la demostración del teorema 9.5 vimos que o bien  $a_1 = a_\infty$ , o bien  $a_2 = a_\infty$ . El caso  $a_2 = a_\infty$  se reduce al caso  $\alpha = 0$ . En efecto, en este caso el segundo (y último) arco de  $u$  es negativo y congruente con el arco de la solución del problema  $\alpha = 0$ ,  $\beta = |u'(a_1)|$ .

Por tanto, es suficiente considerar el caso  $a_1 = a_\infty$ . Por el lema 8.5 existe

$$\lim \frac{u'}{u^{1-\frac{1}{m}}}$$

Luego por la regla de L'Hôpital

$$\lim \frac{u^{1/m}}{a_\infty - x} = - \lim \frac{1}{m} \frac{1}{u^{\frac{1}{m}-1}} u' \quad (27.5)$$

(La existencia del segundo límite implica la del primero). Por tanto también existe

$$K = \lim \frac{u}{(a_\infty - x)^m}$$

Ahora aplicamos la regla de L'Hôpital cuatro veces teniendo en cuenta (27.3) y (27.4):

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{m} \lim \frac{-u'}{(a_\infty - x)^{m-1}} = \frac{1}{m(m-1)} \lim \frac{u''}{(a_\infty - x)^{m-2}} = \\ &= \frac{1}{m(m-1)(m-2)} \lim \frac{-u'''}{(a_\infty - x)^{m-3}} = \frac{1}{m(m-1)(m-2)(3-m)} \lim \frac{-u^{iv}}{(a_\infty - x)^{m-4}} \end{aligned} \quad (27.6)$$



igualdades condicionadas a la existencia del último de los límites.

Finalmente, usando la ecuación de Euler  $u^{iv} = -C u^{r-1}$  y la identidad  $m-4 = m(r-1)$ , resulta

$$K = \frac{C}{m(m-1)(m-2)(3-m)} \lim \left[ \frac{u}{(a_\infty - x)^m} \right]^{r-1} =$$

$$= \frac{C}{m(m-1)(m-2)(3-m)} K^{r-1}$$

lo que demuestra (27.1) y, al mismo tiempo, el punto I del teorema, pues ha resultado que todos los límites de (27.6) existen.

Ahora (27.2) resulta de (27.5). Q.E.D.

El teorema 9.3, el lema 8.5 y el corolario 8.2 nos dan los siguientes corolarios. (\*)

Corolario 27.1 En las hipótesis del teorema anterior. Si

$$\frac{\beta}{\alpha^{1-\frac{1}{m}}} > -m K^{1/m}$$

entonces el problema  $\alpha \beta r$  tiene solución única,  $a_1 = a_\infty$ ,  $u \geq 0$  en todo  $R^+$  y la función

$$\frac{u'(x)}{u(x)^{1-\frac{1}{m}}}$$

es estrictamente decreciente en  $(0, a_1)$ .

Corolario 27.2 En las hipótesis del teorema anterior. Si

$$\frac{\beta}{\alpha^{1-\frac{1}{m}}} = -m K^{1/m}$$

entonces el problema  $\alpha \beta r$  tiene solución única,  $a_1 = a_\infty$ ,  $u \geq 0$  en todo  $R^+$  y

(\*) páginas 57, 53 y 55, respectivamente.

$$\frac{u'(x)}{u(x)^{1 - \frac{1}{m}}} = \text{Cte} - m k^{1/m}$$

en  $(0, a_1)$ .

Además  $u$  está dada por (8.10), pág. 53 .

28. Unicidad y no unicidad.

En esta sección proseguimos la línea argumental de la anterior. Asu-  
mimos las hipótesis y la notación del teorema 27.1 .

Los métodos de demostración se basarán en el teorema 24.1 de conti-  
nuidad en los parámetros y en la monotonía de la función auxiliar funda-  
mental del lema 8.5 .

Llamaremos

$$\rho = \frac{\beta}{1 - \frac{1}{m}}, \quad h(x) = \frac{u'(x)}{1 - \frac{1}{m}} \quad (28.1)$$

Dado que  $m = 4/(2-r)$ ,

$$1 - \frac{1}{m} = \frac{2+r}{4} \quad (28.2)$$

Recordamos que o bien  $a_1 = a_\infty$  o bien  $a_2 = a_\infty$  y que la función  $h$   
es monótona en  $(0, a_1)$  en virtud del lema 8.5.

Si  $a_1 = a_\infty$ ,  $h$  será decreciente, constante o creciente según sea  
 $\rho$  mayor, igual o menor que  $-m K^{1/m}$ .

Si  $a_2 = a_\infty$ ,  $u$  tiene valores negativos y  $h$  es decreciente en  $(0, a_1)$   
ya que entonces  $u'(a_1) < 0$  y  $h(a_1) = -\infty$ .

Estas consideraciones sólo dependen del valor de  $\rho$ , pues las solu-  
ciones de problemas  $\alpha\beta r$  con el mismo valor de  $\rho$  difieren sólo en una  
semejanza (lema 8.1).

Definimos

$$\rho^* = \inf \rho$$

extendido al conjunto de los valores de  $\rho$  tales que el problema  $\alpha\beta r$   
(fijados  $r, C$ ) posee una solución no-negativa en todo  $R^+$ .  $\rho^*$  depende  
de  $r, C$ . Para el problema  $r=0$  calculamos  $\rho^*$  explícitamente (nota p. 146).

Lema 28.1 Sea  $r > 0$  tal que  $U$  tiene un solo arco. Entonces

$$-\infty \neq \rho^* \leq -m K^{1/m}$$

La segunda desigualdad es inmediata de los corolarios 27.1 y 27.2.

Para demostrar que  $\rho^* \neq -\infty$  empleamos el teorema 24.1 de continuidad en los parámetros, ahora con  $r$  fijo. Supongamos (reducción al absurdo) que  $\rho^* = -\infty$ . Consideremos una sucesión  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  tal que  $\alpha_n \rightarrow 0$  y

$$\alpha_n > 0, \quad \beta_n = -1 \quad \text{para todo } n$$

Por la hipótesis de absurdo, el problema  $\alpha_n \beta_n$  tiene una solución no-negativa para todo  $n$ ; luego por el teorema de continuidad el problema  $\alpha = 0, \beta = -1$  tiene una solución no-negativa: contradicción.

Los siguientes dos teoremas resuelven la cuestión de la unicidad y de la no unicidad, así como dan una información muy detallada sobre la estructura de  $u(x; \alpha, \beta)$  según los valores de  $\alpha, \beta$ .

Los enunciados asumen el convenio de signos sobre  $\alpha, \beta$ :  $\alpha \geq 0$  y  $\beta > 0$  si  $\alpha = 0$ , de modo que  $u > 0$  cerca del origen.

Teorema 28.1 Sea  $r > 0$  tal que  $U$  tiene un solo arco. Consideremos el cuadro de la página siguiente. Se tiene la siguiente alternativa:

I. O bien  $\rho^* < -mK^{1/m}$ . Entonces se dan todos los casos 1 a 5 del cuadro; la solución es única para todo  $(\alpha, \beta)$  tal que  $\rho \neq \rho^*$  y hay dos y sólo dos soluciones cuando  $\rho = \rho^*$ .

II. O bien  $\rho^* = -mK^{1/m}$ . Entonces se dan sólo los casos 1, 2 y 5 del cuadro y la solución es única para todo  $(\alpha, \beta)$ .

La demostración de II será evidente a partir de la de I. Así, sólo tratamos I.

Los casos 1 y 2 del cuadro son los corolarios 27.1 y 27.2.

Demostración del caso 3. Por el corolario 8.2<sup>(\*)</sup> puede haber a lo más dos soluciones, una con  $h$  creciente y otra con  $h$  decreciente. Por tanto, basta excluir que sea  $h$  decreciente. Supongamos (reducción al absurdo) que  $h$  es decreciente. Entonces  $u$  tiene valores negativos y  $h(a_1) = -\infty$ , según lo dicho al comienzo de esta sección. Sea un pro

(\*) pág. 55.

$\rho$	$a_\infty$	$u(x)$	$h(x)$ en $(0, a_1)$	$\lim_{x \rightarrow a_1} h(x)$	nº de soluciones
1. $\rho > -mk^{1/m}$	$a_1 = a_\infty$	$\geq 0$ en $R^+$	decreciente	$-mk^{1/m}$	una
2. $\rho = -mk^{1/m}$	$a_1 = a_\infty$	$\geq 0$ en $R^+$	constante	$-mk^{1/m}$	una
3. $\rho^* < \rho < -mk^{1/m}$	$a_1 = a_\infty$	$\geq 0$ en $R^+$	creciente	$-mk^{1/m}$	una
4. $\rho = \rho^*$		una solución del tipo 3 y una del tipo 5			dos
5. $\rho < \rho^*$	$a_2 = a_\infty$	con valores negativos	decreciente	$-\infty$	una

Cuadro correspondiente al teorema 28.1

Para las notaciones véanse las fórmulas (28.1) y (28.2) y el teorema 27.1  
 $\rho^*$  se define en la pág. 156

blema  $\alpha_1 \beta_1 r$  tal que

$$\rho^* < \rho_1 < \rho$$

Como  $\rho_1$  pertenece a la imagen de  $h$ , el problema  $\alpha_1 \beta_1 r$  tiene solución única  $u_1$  que se representa mediante  $u$ , en virtud del lema 8.2. (La función  $\bar{u}$  del lema 8.2 es aquí  $u$ , mientras que la función  $u$  del lema 8.2 es ahora  $u_1$ ). Luego  $u_1$  es única y tiene valores negativos: contradicción con la definición de  $\rho^*$ .

Demostración del caso 5. En virtud de la definición de  $\rho^*$ ,  $u$  tiene valores negativos; por tanto  $h$  es decreciente, luego la solución es única por el corolario 8.2.

Demostración del caso 4. Veamos que existe una solución del tipo 3. De nuevo recurrimos al teorema 24.1 de continuidad en los parámetros (a  $r$  constante). Sean  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  tales que

$$\rho^* = \frac{\beta^*}{\alpha^{*1 - \frac{1}{m}}}$$

Sea una sucesión  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  tal que  $(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow (\alpha^*, \beta^*)$  y que

$$\rho^* < \rho_n < -m K^{1/m}$$

Por el caso 3 sabemos que es creciente la función  $h_n$  asociada a la solución  $u_n$  del problema  $\alpha_n \beta_n$ . Por el teorema de continuidad existe una subsucesión de  $\{u_n\}$  que converge hacia una solución  $u^*$  del problema  $\alpha^* \beta^*$ . Por tanto  $u^* \geq 0$  y  $h^*$  es no-decreciente, luego  $u^*$  es del tipo 3.

Análogamente se prueba que existe una solución del tipo 5. <sup>(\*)</sup> Q. E. D.

#### Teorema 28.2

I. La alternativa I del teorema anterior se da para todo  $r$  en un entorno a la derecha de cero.

II. La alternativa II del teorema anterior se da para al menos un  $r > 0$ .

-----  
(\*) No hay más de dos soluciones por el corolario 8.2 (p.55) o el teorema 9.1 (p.56).

Ya sabemos (teorema 26.1) que  $U$  tiene un solo arco para  $r$  en un entorno a la derecha de cero.

La demostración del punto I es la misma que la del punto II (p.150) del teorema 26.1, puesto que en la alternativa II la función  $h$  es no-creciente para todos  $\alpha, \beta$ . (Decimos la alternativa II y no la I porque se hace una hipótesis de reducción al absurdo).

La demostración del punto II se basa también en el teorema 24.1 de continuidad en los parámetros, aplicado con  $\alpha, \beta$  fijos. Sea

$$r_0 = \sup r$$

extendido al conjunto de los valores de  $r > 0$  tales que  $U$  tiene un solo arco.

Por el lema 26.1  $U_0$  tiene un solo arco.

Vamos a ver que para  $r_0$  se da la alternativa II. Sea  $u_0$  una solución del problema  $\alpha\beta r_0$ . Por el teorema de continuidad,  $u_0$  es el límite de una cierta sucesión  $\{u_n\}$ ,  $u_n$  de infinitos arcos (tómese  $r_n > r_0$ ,  $r_n \rightarrow r_0$ ). Por tanto  $h_n$  es decreciente en el primer arco, luego  $h_0$  es no-creciente cualquiera que sea  $(\alpha, \beta)$ . Q.E.D.

29. Acotación de  $(2/3) - \epsilon_0$ 

Nos referimos al número que aparece en el teorema 26.1.

La acotación de este número involucra cálculos numéricos detallados, cuyo principio damos aquí.

Por el teorema 27.1 y el corolario 27.2 conocemos explícitamente la solución del problema  $\alpha\beta r$  si  $U$  tiene un solo arco y si

$$\frac{\beta}{\alpha^{1 - \frac{1}{m}}} = -m K^{1/m}$$

y también conocemos explícitamente el correspondiente valor del mínimo  $M$  del funcional.

Ahora ensayamos funciones  $v$  del conjunto de minimización del problema  $\alpha\beta r$ . Por ejemplo, funciones del tipo (15.4) prolongados por cero, de modo que tenemos un parámetro libre  $z$ . Si conseguimos obtener para alguna  $v$

$$J(v) < M$$

resulta una contradicción que prueba que  $U$  tiene infinitos arcos para el valor de  $r$  considerado,

De esta forma hemos llegado a

$$\frac{2}{3} - \epsilon_0 < 0.265$$





PARTE VII

OTROS RESULTADOS



### 30. Compacidad del soporte en problemas con "segundo miembro" $g$

Si añadimos al funcional del problema  $\Gamma$  el término

$$- \int_0^{\infty} f(x) v''(x) dx \quad \text{con} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

toda solución  $u$  del nuevo problema verifica donde  $u' \neq 0$  la ecuación de Euler (véase la sección 13)

$$u^{iv} + \Gamma'(u) = g \quad \text{con} \quad g = f''$$

La existencia de solución está garantizada por el teorema 4.1. (Véase también la nota b que sigue a dicho teorema).

Nótese que  $g$  es de soporte compacto si y sólo si lo es  $f$ , debido a que  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$

Si  $f$  tiene soporte compacto,  $u$  tiene soporte compacto en las mismas hipótesis del teorema 19.1. En efecto, basta razonar en una semirrecta disjunta con el soporte de  $f$ .

Si  $f$  tiene soporte no-compacto y  $\Gamma \in C^1(\mathbb{R})$ , entonces la ecuación de Euler es válida en todo  $\mathbb{R}^+$  (sección 6-B) y por tanto  $u$  tiene soporte no-compacto.

Sin embargo, cuando  $\Gamma$  no es  $C^1$  puede ocurrir que  $u$  tenga soporte compacto sin que lo tenga  $f$ , como muestra el siguiente teorema.

Teorema 30.1, Dado  $0 < r < 1$ , consideramos el problema de minimizar

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v''(x)^2 dx + \int_0^{\infty} |v(x)|^r dx - \int_0^{\infty} f(x) v''(x) dx$$

en el conjunto definido por

$$v'' \in L^2(R^+) \quad , \quad v \in L^r(R^+) \quad , \quad v(0) = \alpha \quad , \quad v'(0) = \beta$$

Entonces, toda solución  $u$  de este problema tiene soporte compacto si

$$f \in L^2(R^+) \quad y \quad f'' \in L^\infty(R^+) \quad (30.1)$$

Como ya hemos dicho, la condición  $f \in L^2$  garantiza la existencia de solución.

Ponemos

$$g = f'' \quad G = \|g\|_\infty \quad (30.2)$$

En el abierto en qué no se anulan simultáneamente  $u$  y  $u'$  se verifica la ecuación de Euler

$$u^{iv} = -r \frac{\operatorname{sgn} u}{|u|^{1-r}} + g \quad (30.3)$$

La demostración del teorema va a ser, en parte, muy parecida al caso  $g \equiv 0$ . La principal nueva dificultad es que ahora no es válido el lema 5.5 (pág. 35).

1.º paso. Veamos que existen puntos arbitrariamente grandes en los que  $u$  y  $u'$  se anulan simultáneamente. Si no fuera así, sería válida la ecuación de Euler (30.3) en toda una semirrecta. Como  $u \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  (teorema 5.1) y  $g$  es acotada, desde un cierto  $x$  en adelante se tendrá

$$\operatorname{sgn} u^{iv} = -\operatorname{sgn} u \quad (30.4)$$

$$|u^{iv}| \geq \delta > 0 \quad (30.5)$$

De (30.4) se deduce, como en el lema 12.3, <sup>(\*)</sup> que  $u$  tiene ceros arbitrariamente grandes. Razonando ahora como en el teorema 20.1, de (30.5) resulta que los ceros de  $u$  tienen un punto de acumulación finito en el que se anulan a la vez  $u$  y  $u'$ : contradicción que prueba el 1<sup>er</sup> paso.

2º paso. Por el paso anterior y por ser  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , dado cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $x_0$  tal que

$$|u(x)| \leq \epsilon \quad \text{para todo } x \geq x_0 \quad \text{y} \quad u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

Por tanto, el siguiente lema finaliza la demostración.

Lema 30.1 Sea  $y_0$  la única raíz positiva de

$$y^r = G y$$

donde la constante  $G$  está dada por (30.2). Si

$$|u(x)| \leq y_0 \quad \text{para todo } x \geq x_0 \quad \text{y} \quad u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

entonces  $u(x) = 0$  para todo  $x \geq x_0$ .

Antes de demostrar este lema damos otro lema auxiliar.

Lema 30.2 En las hipótesis (30.1) se tiene

$$\int_0^\infty f(x) v''(x) dx = \alpha f'(0) - \beta f(0) + \int_0^\infty f''(x) v(x) dx$$

para toda función  $v$  del conjunto de minimización del problema del teorema 30.1

-----  
(\*) pág. 74 .

Dado que es  $r < 1$ , por el lema 5.2<sup>(\*)</sup> (o por el teorema 5.1) se tiene que  $v \in L^1(\mathbb{R}^+)$ , luego  $f''(x) v(x) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ , lo que justifica la integral del segundo miembro.

Además por los lemas 5.2 y 5.3<sup>(\*)</sup>

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}^+) \quad , \quad f' \in L^\infty(\mathbb{R}^+) \quad (30.6)$$

y por el teorema 5.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v'(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty \quad (30.7)$$

Ahora el lema 30.2 resulta integrando por partes en  $(0, x)$ , haciendo  $x \rightarrow \infty$  y teniendo presente (30.6) y (30.7).

Finalmente, demostramos el lema 30.1. Por el lema 30.2 podemos sustituir  $J$  por el funcional

$$\tilde{J}(v) = \frac{1}{2} \int_0^\infty v''^2 + \int_0^\infty |v|^r - \int_0^\infty g v$$

que sólo difiere de  $J$  en una constante (independiente de  $v$ ).

Consideremos el problema de minimización en  $[x_0, \infty)$ . La función  $v \equiv 0$  en  $[x_0, \infty)$  es admisible de modo que

$$M \leq \tilde{J}_{x_0}(0) = 0 \quad (30.8)$$

donde  $M$  es el mínimo del funcional  $\tilde{J}$  para el problema en  $[x_0, \infty)$ .

Como  $|u| \leq y_0$ , por definición de  $y_0$  se tiene

$$|u|^r \geq G|u| \quad \text{en} \quad [x_0, \infty)$$

$$\int_{x_0}^\infty |u|^r - \int_{x_0}^\infty g u \geq \int_{x_0}^\infty |u|^r - G \int_{x_0}^\infty |u| \geq 0$$

y en definitiva

-----  
(\*) Lemas 5.2 y 5.3 en págs. 32 y 33.

$$M = \tilde{J}_{x_0}(u) \geq \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} u''^2 \geq 0 \quad (30.9)$$

De (30.8) y (30.9) resulta  $M = 0$ . Pero entonces por (30.9) es  $u'' = 0$  c.t.p. en  $[x_0, \infty)$  y por tanto también  $u = 0$  en  $[x_0, \infty)$ . Q.E.D.

Nota En el caso  $r = 1$  el teorema 30.1 se mantiene suprimiendo la hipótesis  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$  y añadiendo  $\|g\|_{\infty} < 1$ , lo que ya fue demostrado por Bidaut-Veron [3].



31. El problema  $\alpha\beta r$  con la restricción  $v \geq 0$ 

Es equivalente al problema  $\alpha\beta r$  con

$$\Gamma(s) = \begin{cases} |s|^r & \text{si } s \geq 0 \\ +\infty & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

La existencia de solución resulta del teorema 4.1.

Todos los resultados de las secciones 7 y 8 siguen siendo válidos.

La solución tiene soporte compacto para todo  $r > 0$ . Es inmediato del lema 5.5 y de la existencia de ceros de  $u$ . Esto último se deduce a su vez de la ecuación de Euler donde  $u \neq 0$ , como en el lema 12.3. Desde luego,  $u$  tiene siempre un solo arco.

$u$  es continua para todo  $r > 0$  (véase el lema 15.1). En cambio,  $u'''$  nunca es continua en el extremo del soporte (teorema 12.1).  $u'''(a_\infty^-)$  es finito si  $r > 2/3$  e infinito si  $r \leq 2/3$  (lema 15.3). Para  $r > 2/3$   $u^{iv}$  tiene una masa de Dirac en  $a_\infty$  y es una medida sobre  $R^+$ . Notemos que para  $r \geq 1$  el lema 6.2 proporciona una demostración mucho más directa de que  $u^{iv}$  es una medida.

La solución es única para todo  $r > 0$  y todo  $(\alpha, \beta)$  admisible, según explicamos a continuación:

Cuando  $r \geq 2/3$  la fórmula de representación

$$u(x; \alpha, \beta) = \tau U(\sigma x + s) \quad (31,1)$$

es válida para todo  $(\alpha, \beta)$  admisible. Resulta del teorema 9.3 y de que

$$\lim_{x \rightarrow \Lambda_1^-} \frac{U'(x)}{U(x) \left(1 - \frac{1}{m}\right)} = -\infty \quad \text{si } r \geq 2/3$$

A su vez, (31.1) implica la unicidad para todo  $(\alpha, \beta)$  admisible en virtud del lema 8.2.

Cuando  $0 < r < 2/3$  u verifica el teorema 27.1 y se dan sólo los casos 1, 2 y 3 del teorema 28.1. Por tanto, también para  $r < 2/3$  se tiene unicidad cualquiera que sea  $(\alpha, \beta)$  admisible.

Nota La validez de (31.1) para todo  $(\alpha, \beta)$  proporcionada otra demostración de que (en el problema sin restricción) u tiene infinitos arcos para  $r \geq 2/3$ . En efecto, si no fuera así de (31.1) resultaría

$$u(a, \alpha, \beta) \geq 0 \quad \text{en} \quad R^+ \quad (31.2)$$

para todo  $(\alpha, \beta)$  con los signos convenidos. (Obsérvese que los signos convenidos para  $(\alpha, \beta)$  en el problema sin restricción coinciden con los valores admisibles en el problema con restricción). Pero por continuidad en los parámetros (teorema 24.1) de (31.2) se deduce, razonando como en el lema 28.1, que

$$u(x; 0, -1) \geq 0 \quad \text{en} \quad R^+ ; \text{Contradicción.}$$

32. El problema con funcional

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_0^\infty |v''|^p + \frac{1}{r} \int_0^\infty |v|^r$$

Toda solución tiene soporte compacto si (y sólo si)  $r < p$ . Aquí  $1 < p < \infty$  y  $0 < r < \infty$ .

(La existencia de solución resulta del teorema 4.1).

La ecuación de Euler es ahora

$$w'' + |u|^{r-1} \operatorname{sgn} u = 0 \quad \text{donde} \quad w = |u''|^{p-1} \operatorname{sgn} u''$$

Los resultados obtenidos en este trabajo para el problema r-potencial se mantienen para el nuevo problema haciendo los siguientes cambios:

$$w, w', w'' \quad \text{en vez de} \quad u'', u''', u^{iv}$$

$$m = \frac{2p}{p-r} \quad \text{en vez de} \quad m = \frac{4}{2-r}$$

$$r = \frac{p}{2p-1} \quad \text{en vez de} \quad r = \frac{2}{3}$$

Nótese que  $r = \frac{p}{2p-1}$  es equivalente a  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \right) = 1$

El método de semejanza se aplica sin ninguna nueva dificultad.

Cuando  $r > 1$ , el caso  $p = p_0$  y  $r = r_0$  es, en cierto sentido, equivalente al caso  $p = r'_0$  y  $r = p'_0$ .

33. El problema con funcional

$$J(v) = \frac{1}{j} \|v''\|_p^j + \frac{1}{k} \|v\|_r^k$$

Aquí  $p > 1$ ,  $j > 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $k \geq 1$  y  $\|\cdot\|_p$  es la norma en  $L^p(\mathbb{R}^+)$ , de modo que este funcional es convexo y la solución del problema es única como en la sección 6-C.

La demostración de existencia es casi idéntica a la del teorema 4.1.

La ecuación de Euler es (en sentido multívoco cuando  $r=1$ ):

$$I_p^{\frac{j}{p}-1} \frac{d^2}{dx^2} \left( |u''|^{p-1} \operatorname{sgn} u'' \right) + I_r^{\frac{k}{r}-1} |u|^{r-1} \operatorname{sgn} u = 0$$

donde  $I_p = \int_0^\infty |u''|^p$ ,  $I_r = \int_0^\infty |u|^r$

Este problema se reduce explícitamente al problema de la sección 32 aplicando a la ecuación de Euler argumentos de semejanza como los de la sección 8; ahora  $\sigma$  y  $\tau$  se relacionan con las integrales  $I_r$ ,  $I_p$ . (El problema de minimización puede caracterizarse mediante su ecuación de Euler: ello es bien conocido para funcionales convexos diferenciables ( $r > 1$ ) y para  $r=1$  véanse las referencias de la sección 6-C).

Las razones de semejanza  $\lambda, \mu$  del teorema 9.4 no dependen de  $j, k$ , sino solamente de  $p, r$ .

El problema estudiado por Berkovitz-Pollard [1], [2] y Redheffer [1] corresponde a

$$p = 2, \quad j = 2, \quad r = 1, \quad k = 2$$

mientras que el problema  $r$ -potencial de este trabajo con  $r=1$  corresponde a  $k=1$ .

Llamando  $u_{BP}$  y  $u$ , respectivamente, a la solución de los anteriores

problemas con datos de contorno  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , obtenemos por los citados argumentos de semejanza

$$u_{BP}(x) = I^{-1/5} u(I^{1/5} x) \quad \text{donde} \quad I = \int_0^\infty |u|$$

El valor de la razón de semejanza  $\lambda$  (para  $p=2$ ,  $r=1$ ), que fue ya obtenido por Berkovitz-Pollard [2], es

$$\lambda = 4.1301599$$

La presencia de los exponentes  $j \neq p$  y  $k \neq r$  produce un efecto global que cambia el significado físico del modelo. Por ejemplo, el funcional de Berkovitz-Pollard no corresponde a una barra flotante.

INDICE DE NOTACIONES

Letras griegas

$\alpha$	dato de contorno $u(0) = \alpha$ (sección 1-A). Convenio de signos en la sección 1-B (pág. 9)
$\beta$	dato de contorno $u'(0) = \beta$ (sección 1-A). Convenio de signos en la sección 1-B (pág. 9)
$\Gamma$	ver problema $\Gamma$ , sección 1-A
$\lambda$	una razón de semejanza en el problema r-potencial: teorema 9.4 (sección 9) pág. 58
$\mu$	ver la anterior
$\rho$	$= \frac{\beta}{\alpha^{1-\frac{1}{m}}} \quad 1 - \frac{1}{m} = \frac{2+r}{4} \quad \rho^*: \text{ ver pág. 156}$

Letras y palabras latinas

$a_n$	ceros de $u$
$a_\infty$	extremo superior del soporte de $u$
$A_n$	ceros de $U$
$A_\infty$	extremo superior del soporte de $U$
Abs C	absolutamente continua
$b_n$	ceros de $u'$
C	constante del problema r-potencial (sección 1-A), o bien constante que figura en alguna de las siguientes desigualdades:

$$|\Gamma'(s)| \geq c|s|^{r-1}, |\Gamma'(s)| \leq c|s|^{r-1}, \Gamma(s) \geq \frac{c}{r}|s|^r, \Gamma(s) \leq \frac{c}{r}|s|^r$$

Cte	constante no especificada o que puede cambiar a lo largo de un razonamiento
$C_0(\Omega)$	funciones $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y de soporte compacto
$C_0^j(\Omega)$	funciones $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de soporte compacto y con derivadas $j$ -ésimas continuas
$C_0^\infty(\Omega)$	funciones $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivables y de soporte compacto
c.t.p.	casi todas partes (medida de Lebesgue)
definida positiva	} ver (1.1), sección 1-E (pág. 12)
$h(x)$	$= \frac{u'(x)}{1 - \frac{1}{m} u(x)}$ ver lema 8.5 (sección 8) pág. 53
K	ver teorema 27.1 (página 152). Ocasionalmente otros significados que se especifican en cada lugar.
m	$= \frac{4}{2-r} \quad (\text{sección 8}) \quad 1 - \frac{1}{m} = \frac{2+r}{4}$
m-1	$= \frac{2+r}{2-r}$
m-2	$= \frac{2r}{2-r}$
m-3	$= \frac{3r-2}{2-r}$
m-4	$= m(r-1)$
$M(\alpha, \beta)$	mínimo del funcional del problema $\alpha\beta\Gamma$ o del problema $\alpha\beta r$
$M(c, d)$	medidas de Radon sobre el intervalo $(c, d)$
N	dimensión de $\mathbb{R}^N$
positividad definida	} ver (1.1), sección 1-E (pág. 12)

problema $\Gamma$	o problema $\alpha\beta\Gamma$ : sección 1-A
problema $r$ -potencial	} o problema $\alpha\beta r$ : sección 1-A
$r$	
	ver problema $\alpha\beta r$ , sección 1-A. En otros lugares es el exponente que figura en alguna de las siguientes desigualdades:
	$ \Gamma'(s)  \geq C s ^{r-1},  \Gamma'(s)  \leq C s ^{r-1}, \Gamma(s) \geq \frac{C}{r} s ^r, \Gamma(s) \leq \frac{C}{r} s ^r$
$R^+$	$(0, \infty)$
$\overline{R}^+$	$[0, \infty)$
s.c.i.	semicontinua inferiormente
semi-monótona	} ver (1.2), sección 1-E (pág. 12)
$u$	
$U$	una solución del problema $\alpha\beta\Gamma$ o del problema $\alpha\beta r$
$v$	solución correspondiente a $\alpha = 0, \beta = 1$
	función genérica del conjunto de minimización del problema $\alpha\beta\Gamma$ o del problema $\alpha\beta r$

Otros símbolos

$r'$	exponente conjugado o dual de $r$ ; $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$
$\  \cdot \ _r$	norma $L^r$ si $r \geq 1$ y su generalización natural si $0 < r < 1$
$\overline{\Omega}$	cierre de $\Omega$





INDICE DE LOS PRINCIPALES RESULTADOS

	<u>Problema <math>\Gamma</math></u>	<u>Problema <math>r</math>-potencial</u>
compacidad del soporte	teor.19.1(pág.114)	teor.10.2(pág.63)
ecuación de Euler	teor.16.1(pág.95)	teor. 7.1(pág.45)
regularidad	teor.21.1(pág.124)	teor.11.1(pág.66) y teor.11.2(pág.68)
unicidad para $0 < r < 1$	---	teor. 9.1(pág.56) , teor.28.1(pág.157) y teor.28.2(pág.159)
no unicidad ( $r < 2/3$ )	---	teor.28.1(pág.157) y teor.28.2(pág.159)
infinitos arcos	lema 15.4(pág. 90)	teor.26.1(pág.147) y nota pág. 171
número finito de arcos ( $r < 2/3$ )	---	teor.26.1(pág.147)
estructura de los arcos	teoremas 17.1 y 17.2 (pág.103) y figura pág.104 para $r > 1$ también corol.23.2 (pág.137)	
segundo miembro	sección 30 (pág.165)	sección 30 (pág.165)
restricción $v \geq 0$ (inecuación variacional)	---	sección 31 (pág.170)
otras potencias de la derivada segunda	---	sección 32 (pág.172)



BIBLIOGRAFIA

- Adams, R.A. [1] : Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.
- Alt, H. and Caffarelli, L.A. [1] : A variational problem with a free boundary. *J. für die Reine und Ang. Math.* (Aparecerá).
- Barbu, V. [1] : Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Noordhoff Int. Publishing, Leyden, 1976.
- de Barra, G. [1] : Measure theory and integration. Ellis Horwood Limited, Chichester and John Wiley, New York, 1981.
- Barenblatt, G.I. [1] : Similarity, self-similarity and intermediate asymptotics. Consultants Bureau, New York, 1979.
- Beckenbach, E. and Bellman, R. [1] : Inequalities. Springer, Berlin, 1961.
- Berkovitz, L.D. and Pollard, H. [1] : A non-classical variational problem arising from an optimal filter problem. *Arch. Rat. Mech. and Anal.* 26, 281-304 (1967).
- [2] : Idem, II. *Arch. Rat. Mech. and Anal.* 38, 161-172 (1970).
- [3] : A variational problem related to an optimal filter problem with self-correlated noise. *Trans. Amer. Math. Soc.* 142, 153-175 (1969).
- [4] : Addenda to "a variational problem...". *Trans. Amer. Math. Soc.* 157, 499-504 (1971).
- Bidaut-Veron, M.F. [1] : Propriété de support compact de la solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 4. *C.R. Acad. Sc. Paris* 287, 1005-1008 (1978).
- [2] : Compacité du support de la solution d'une inéquation variationnelle d'ordre 4 dans  $\mathbb{R}^N$ . *Publ. Math. Univ. Pau* (1977), P. 1-33.
- [3] : Principe de maximum et support compact pour une classe d'équations elliptiques non linéaires d'ordre 4. *Publ. Math. Univ. Pau* (1979-80), p. 1-18.
- [4] : Equations elliptiques fortement non linéaires dans des domaines non bornés. *Publ. Math. Univ. Pau* (1980).
- Bluman, G.W. and Cole, J.D. [1] : Similarity methods for differential equations. Springer, New York, 1974.

- Brezis, H. [1] : Solutions with compact support of variational inequalities. Uspekhi Math. Nauk. 129, 103-108 (1974).
- Caffarelli, L.A. [1] : Compactness methods in free boundary problems. Comm. in PDE, 5 (4), 427-448 (1980).
- Díaz, Ildefonso [1] : Soluciones con soporte compacto para algunos problemas no lineales. Actas de la V Reunión de Matemáticos de expresión latina, 390-394 (1978).
- [2] : Técnica de supersoluciones locales para problemas estacionarios no lineales. Aplicación al estudio de flujos subsónicos. 1980. Aparecerá como memoria de la Real Academia de Ciencias, Madrid.
- Duffin, R.J. [1] : Some problems of mathematics and science. Bulletin American Math. Soc. 80,6 (1974) 1053-1070.
- Ekeland, I. et Teman, R. [1] : Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, Paris, 1974.
- Friedman, A. [1] : Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969 and Krieger, New York, 1976.
- Gagliardo, E. [1] : Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. Ric. Mat. 7, 102-137 (1958).
- [2] : Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. Ric. Mat. 8, 24-51 (1959).
- Garabedian, P.R. [1] : A partial differential equation arising in conformal mapping. Pacific J. Math. 1, 485-524 (1951).
- Hadamard, J. [1] : Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoires Académie des Sciences (2), 33 (1908).
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Pólya, G. [1] : Inequalities. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.
- Hestenes, M. and Redheffer, R. [1] : On the minimization of certain quadratic functionals I. Arch. Rat. Mech. and Anal. 56, 1-14. (1974).
- [2] : Idem II. Arch. Rat. Mech. and Anal. 56, 15-33 (1974).
- Ilyushin, A.A. [1] : Plasticité. Ed. Eyrolles, Paris, 1956. Original ruso 1948.

Kachanov, L.M. [1] : Some problems of creep theory. GITTL, Leningrad-Moscow, 1949.

[2] : Foundations of the theory of plasticity. North-Holland, Amsterdam, 1971. Original ruso 1948.

Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. [1] : Functional analysis in normed spaces. Macmillan, New York-London, 1964.

Langenbach, A. [1] : Elastisch-plastische Deformationen von Platten. Zeitschrift für angew. Math. und Mech. 41, 126-134 (1961).

[2] : Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung. Springer, Berlin, 1977.

Lions, J.L. [1] : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.

[2] : Dérivées intermédiaires et espaces intermédiaires. C.R.Acad. Sc. Paris 256, 4343-4345 (1963).

Miranda, C. [1] : Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili. Giornale di Mat. di Battaglini, 78, 97-118 (1948).

Nicolescu, M. [1] : Les fonctions polyharmoniques. Hermann, Paris, 1936.

Morrey, C.B. (Jr.) [1] : Multiple integrals in the calculus of variations. Springer, New York, 1966.

Nirenberg, L. [1] : On elliptic partial differential equations. Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, XIII, 115-162 (1959).

Phillips, D. [1] : A minimization problem and the regularity of solutions in the presence of a free boundary. Preprint Purdue Univ., West Lafayette, 1981.

Pisarenko, G.S., Yákovlev, A.P. y Matvéev, V.V. [1] : Manual de resistencia de materiales. Mir, Moscú, 1975.

Pólya, G. [1] : On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation. Trans. Am. Math. Soc. 24, 312-324 (1922).

- Redheffer, R. [1] : On a nonlinear functional of Berkovitz and Pollard.  
Arch. Rat. Mech. and Anal. 50, 1-9 (1973).
- [2] : A note on the Littlewood three-derivatives theorem.  
J. London Math. Soc. (2) , 9 (1974) , 9-15.
- Redheffer, R. and Walter, W. [1] : Inequalities involving derivatives.  
Pacific J. Math. 85, N° 1, 165-178 (1979).
- Royden, H. L. [1] : Real analysis. Macmillan, New York-London, 1968.
- Schaefer, Ph. W. [1] : On a maximum principle for a class of fourth-order semilinear elliptic equations. Proceedings Royal Soc. Edinburgh, 77 A, 319-323 (1977).
- Schwarz, L. [1] : Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966 (3ª edición).
- Sedov, L. I. [1] : Similarity and dimensional methods in mechanics. Academic Press, New York, 1959 (4ª edición).
- Sobolev, S. L. [1] : Applications of functional analysis in mathematical physics. American Math. Soc. Translations, Providence, 1963.
- Sz. -Nagy, B. [1] : Introduction to real functions and orthogonal expansions. Oxford Univ. Press, New York, 1965.
- Vainberg, M. M. [1] : Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, John Wiley, New York, 1973.

